

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Vanja Čemerin**

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

Mentori:

Doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Student:

Vanja Čemerin

Zagreb, 2017.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Ivici Skozritu na strpljenju, uloženom trudu, podršci te pruženoj pomoći prilikom izrade ovog rada.

Zahvaljujem se kolegi i prijatelju mag. ing. Damjanu Čakmaku na pruženim savjetima i pomoći oko programskog paketa *Abaqus*.

Zahvaljujem svojoj obitelji koja me sve ove godine podržavala i vjerovala u mene, ponajprije majci Tanji i ocu Milivoju.

Posebnu zahvalu izražavam djevojci Mateji koje je bila uz mene kada mi je bilo najteže tokom studentskih dana.

Na kraju zahvaljujem svim prijateljima i kolegama s Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu na prijateljstvu i kolegijalnosti.

Vanja Čemerin



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: Čemerin Vanja

Mat. br.: 0035183984

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička analiza konstrukcija oblikovanih metodom vlačnih trokuta**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical Analysis of Structure Designed by the Method of Tensile Triangles**

Opis zadatka:

Metoda vlačnih trokuta je prvenstveno jednostavna grafička metoda oblikovanja konstrukcije za rješavanja problema koncentracije naprezanja na mjestima geometrijskih diskontinuiteta. Služi za smanjivanje naprezanja zbog postojanja ureza i uklanjanje potencijalnih mjesta na kojima može doći do pukotina. Preuzeta je iz prirode gdje se npr. kod gotovo pravog kuta između donjeg dijela debla i podloge (zemlje), upravo na tom mjestu deblo oblikuje tako kao da se „stavljaju“ vlačni trokuti i to na onoj strani debla koja je opterećena vlačno odakle dolazi i ime „metoda vlačnih trokuta“.

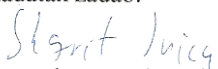
Za proizvoljno definirane dimenzije konzole promjenjivog presjeka, gdje će prijelaz s debljeg na tanji dio biti izveden kao zaobljenje, eliptično zaobljenje i prijelaz oblikovan metodom vlačnih trokuta potrebno je provesti proračun čvrstoće, te usporediti dobivene vrijednosti faktora koncentracije naprezanja. Proračun je potrebno provesti dostupnim analitičkim izrazima i numerički primjenom programskog paketa Abaqus® koji se temelji na metodi konačnih elemenata, te prikazati usporedbu dobivenih rezultata. Za diskretizaciju konzole koristiti dostupne konačne elemente iz korištenog programskog paketa. Za sve primijenjene konačne elemente izvršiti verifikaciju na jednostavnijim problemima te rezultate usporediti s pripadnim analitičkim rješenjima. Osim toga, za proračunski model potrebno je odrediti optimalnu mrežu konačnih elemenata te prikazati konvergenciju rješenja.

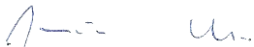
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
17. studenog 2016.

Rok predaje rada:  
19. siječnja 2017.

Predviđeni datumi obrane:  
25., 26. i 27. siječnja 2017.

Zadatak zadao:  
  
Doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Predsjednica Povjerenstva:  
  
Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS TABLICA.....	VI
POPIS OZNAKA .....	VII
SAŽETAK.....	1
SUMMARY .....	2
1. UVOD.....	3
2. RAZVOJ PROIZVODA.....	4
2.1. Planiranje .....	5
2.2. Koncipiranje.....	6
2.2.1. Metode prikupljanja i „brainstorming“ metode .....	7
2.2.2. Napredne metode – „biasing“ metode .....	9
3. BIOMIMIKRIJA .....	12
3.1. Što je biomimikrija tj. bionika?.....	12
3.2. Primjeri biomimikrije.....	13
3.2.1. Učenje od drveća i kostiju.....	15
4. METODA VLAČNIH TROKUTA .....	18
4.1. Primjena metode vlačnih trokuta .....	20
4.2. Primjena metode vlačnih trokuta u slučaju dvoosnih opterećenja .....	24
5. ANALITIČKI PRORAČUN SAVOJNO OPTEREĆENE KONZOLE KONSTANTNOG POPREČNOG PRESJEKA .....	28
6. PRORAČUN KONZOLE OPTEREĆENE NA SAVIJANJE KONSTANTNOG POPREČNOG PRESJEKA POMOĆU PROGRAMSKOG PAKETA ABAQUS .....	33
6.1. Konačni elementi .....	33
6.1.1. Tetraedarski konačni elementi .....	33
6.1.2. Prizmatični konačni elementi.....	36
6.1.2.1. Serendipity element drugog reda s 20 čvorova.....	36
6.1.2.2. Serendipity element drugog reda s 15 čvorova.....	37
6.2. Proračun i rezultati u programskom paketu Abaqus s tetraedarskom mrežom.....	38
6.3. Proračun i rezultati u programskom paketu Abaqus s prizmatičnom mrežom konačnih elemenata.....	43
7. PRORAČUN SAVOJNO OPTEREĆENE KONZOLE PROMJENJIVOG POPREČNOG PRESJEKA .....	49
7.1. Faktor koncentracije naprezanja .....	49
7.1.1. Efektivni faktor koncentracije naprezanja .....	51
7.1.2. Izračun faktora koncentracije naprezanja .....	52
7.1.2.1. Prijelaz s većeg na manji promjer konzole izveden zaobljenjem (četvrtina kružnice) .....	54
7.1.2.2. Prijelaz s većeg na manji promjer konzole izveden eliptičnim zaobljenjem.....	58
7.1.2.3. Prijelaz s većeg na manji promjer konzole definiranim pomoću metode vlačnih trokuta .....	62

---

8. USPOREDBA FAKTORA KONCENTRACIJE NAPREZANJA .....	68
9. ZAKLJUČAK.....	70
LITERATURA.....	72
PRILOZI.....	73

## POPIS SLIKA

Slika 1. Krivulja zarade tokom životnog ciklusa proizvoda [1].....	5
Slika 2. Faze razvoja proizvoda [1].....	5
Slika 3. Patent Nikole Tesle iz 1894. godine [5].....	9
Slika 4. Velcro [8] .....	13
Slika 5. Vodomar i Shinkansen vlak [8] .....	14
Slika 6. Peraja kita i vjetroturbina tvrtke ENS [8] .....	14
Slika 7. Kršenje aksioma jednolike raspodjele naprezanja [9].....	15
Slika 8. SKO metoda [7] .....	16
Slika 9. Naprezanje membrane s rupom u sredini opterećene vlačno [9] .....	17
Slika 10. Mjesta koncentracije naprezanja kod vratila.....	17
Slika 11. Izgled rebra lijevo; naprezanja tokom svijanja grede desno [9] .....	18
Slika 12. Procedura nastajanja vlačnih trokuta [9].....	19
Slika 13. Smjer glavnih tangencijalnih naprezanja [9] .....	19
Slika 14. Rotirajuća kvadratna ploča [9] .....	20
Slika 15. Metoda vlačnih trokuta za konzolu opterećenu na savijanje [9].....	21
Slika 16. MKE analiza različitih oblika konzole [9] .....	21
Slika 17. Kontinuirana promjena poprečnog presjeka [9].....	22
Slika 18. Primjer optimalnog spoja navoja i stabla vijka [9] .....	22
Slika 19. Rezultati eksperimenta [9] .....	23
Slika 20. Optimalan oblik otvora kod drveta [9].....	23
Slika 21. Jednoosno, dvoosno i kombinirano opterećenje [9].....	24
Slika 22. Optimalan spoj dvoosno opterećene komponente [9].....	24
Slika 23. Spoj dviju grana stabla različito opterećenih [9] .....	25
Slika 24. Primjer optimalnih zakrivljenih „nosača“ [9] .....	25
Slika 25. Zub morskog psa [9] .....	26
Slika 26. Oblikovanje vilice [9] .....	26
Slika 27. Podaci eksperimenta za zamornu čvrstoću vilice [9].....	27
Slika 28. Dijagram reakcija i unutarnjih momenata konzole opterećene na savijanje.....	29
Slika 29. Prikaz naprezanja po presjeku.....	30
Slika 30. Određivanje unutarnjeg momenta na konzoli opterećenoj na savijanje .....	30
Slika 31. Osnovni tetraedarski element [11] .....	34
Slika 32. Tetraedarski element višeg reda [13] .....	35
Slika 33. Integracijske točke C3D10I elementa [13] .....	35
Slika 34. Prizmastični serendipity element drugog reda s 20 čvorova (C3D20R) [13].....	36
Slika 35. Integracijske točke C3D20R elementa [13] .....	37
Slika 36. Serendipity element drugog reda s 15 čvorova (C3D15) [13] .....	37
Slika 37. Integracijske točke C3D15 elementa [13].....	38
Slika 38. Model konzole opterećene na savijanje u programskom paketu Abaqus .....	38
Slika 39. Različite mreže konačnih elemenata konzole opterećene na savijanje s konstantnim poprečnim presjekom i tetraedarskim elementima.....	39
Slika 40. Raspodjela naprezanja u MPa konzole s konstantnim poprečnim presjekom i tetraedarskim elementima.....	40
Slika 41. Raspodjela naprezanja po presjeku u programskom paketu Abaqus .....	41
Slika 42. Progib konzole u mm s konstantnim poprečnim presjekom i tetraedarskim elementima .....	41
Slika 43. Dijagram konvergencije naprezanja za konzolu s konstantnim poprečnim presjekom i tetraedarskim elementima .....	42

Slika 44. Dijagram konvergencije progiba za konzolu s konstantnim poprečnim presjekom i tetraedarskim elementima.....	43
Slika 45. Pentaedarski (wedge) i heksaedarski oblik konačnih elemenata .....	44
Slika 46. Različite mreže konačnih elemenata konzole opterećene na savijanje s konstantnim poprečnim presjekom i prizmatičnim konačnim elementima .....	44
Slika 47. Raspodjela naprezanja u MPa konzole s konstantnim poprečnim presjekom i prizmatičnim konačnim elementima .....	45
Slika 48. Progib konzole u mm s konstantnim poprečnim presjekom i prizmatičnim konačnim elementima .....	46
Slika 49. Dijagram konvergencije naprezanja za konzolu s konstantnim poprečnim presjekom i prizmatičnim konačnim elementima .....	47
Slika 50. Dijagram konvergencije progiba za konzolu s konstantnim poprečnim presjekom i prizmatičnim konačnim elementima .....	47
Slika 51. Konzola opterećena na savijanje s promjenjivim poprečnim presjekom.....	49
Slika 52. Ploča s provrtom [14].....	50
Slika 53. Primjer vratila opterećenog na savijanje za koji će se računati faktor koncentracije naprezanja [14] .....	52
Slika 54. Prikaz prijelaza zaobljenjem (četvrtina kružnice).....	54
Slika 55. Model konzole opterećen na savijanje s promjenjivim poprečnim presjekom i zaobljenjem radijusom .....	55
Slika 56. Progušćivanje mreže na mjestu zaobljenja radijusom .....	55
Slika 57. Različite mreže konzole opterećene savijanjem s promjenjivim poprečnim presjekom i zaobljenjem radijusom.....	56
Slika 58. Raspodjela naprezanja u MPa konzole s promjenjivim poprečnim presjekom i zaobljenjem radijusom .....	57
Slika 59. Konvergencija faktora koncentracije naprezanja za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i zaobljenjem radijusom.....	57
Slika 60. Eliptično zaobljenje [15].....	58
Slika 61. Model konzole opterećen na savijanje s promjenjivim poprečnim presjekom i eliptičnim zaobljenjem .....	59
Slika 62. Progušćivanje mreže na mjestu eliptičnog zaobljenja .....	59
Slika 63. Različite mreže za konzolu opterećenu na savijanje promjenjivog poprečnog presjeka s eliptičnim zaobljenjem .....	60
Slika 64. Raspodjela naprezanja konzole u MPa s promjenjivim poprečnim presjekom i eliptičnim zaobljenjem .....	61
Slika 65. Konvergencija faktora koncentracije naprezanja za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i eliptičnim zaobljenjem .....	61
Slika 66. Proces crtanja metode vlačnih trokuta .....	62
Slika 67. Metoda vlačnih trokuta prije zaobljavanja prijelaza s trokuta na trokut.....	63
Slika 68. Konačan prijelaz s većeg na manji promjer konzole nakon zaobljavanja prijelaza s trokuta na trokut .....	63
Slika 69. Model konzole opterećene na savijanje s promjenjivim poprečnim presjekom i prijelazom definiranim pomoću metode vlačnih trokuta .....	64
Slika 70. Progušćivanje mreže na mjestu prijelaza definiranog pomoću metode vlačnih trokuta.....	64
Slika 71. Različite mreže za konzolu opterećenu na savijanje s promjenjivim poprečnim presjekom i prijelazom definiranim pomoću metode vlačnih trokuta.....	65
Slika 72. Raspodjela naprezanje u MPa za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i prijelazom definiranim pomoću metode vlačnih trokuta .....	66



- Slika 73. Konvergencija faktora koncentracije naprezanja za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i prijelazom definiranim pomoću metode vlačnih trokuta. 67
- Slika 74. Prikaz prijelaza s većeg na manji promjer konzole opterećene na savijanje ..... 68

## POPIS TABLICA

Tablica 1. Fizikalni principi za problem pohrane energije [2] .....	10
Tablica 2. Rezultati naprezanja i pomaka za mreže s različitim brojem tetraedarskih konačnih elemenata .....	40
Tablica 3. Usporedba analitičkog i numeričkog proračuna konzole s konstantnim poprečnim presjekom i tetraedarskim elementima .....	42
Tablica 4. Rezultati naprezanja i pomaka za mreže s različitim brojem heksaedarskih i pentaedarskih konačnih elemenata .....	45
Tablica 5. Usporedba analitičkog i numeričkog proračuna konzole s konstantnim poprečnim presjekom s heksaedarskim i pentaedarskim elementima .....	46
Tablica 6. Usporedba rezultata dobivenih pomoću tetraedarskih i prizmatičnih (heksaedarskih i pentaedarskih) elemenata .....	48
Tablica 7. Rezultati naprezanja za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i zaobljenjem .....	56
Tablica 8. Rezultati naprezanja savijanja za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i eliptičnim zaobljenjem .....	60
Tablica 9. Naprezanja za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i prijelazom definiranim pomoću metode vlačnih trokuta .....	66
Tablica 10 . Usporedba dobivenih faktora koncentracije naprezanja za različite prijelaze s većeg na manji promjer konzole opterećene na savijanje .....	69

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$a$	mm	velika poluos elipse
$a/b$	-	omjer poluosi elipse
$b$	mm	mala poluos elipse
$C_1$	-	računski faktor jedan
$C_2$	-	računski faktor dva
$C_3$	-	računski faktor tri
$C_4$	-	računski faktor četiri
$d$	mm	promjer konzole s konstantnim poprečnim presjekom
$D$	mm	promjer većeg presjeka konzole s promjenjivim poprečnim presjekom
$d/l$	-	omjer visine i dužine presjeka konzole s konstantnim poprečnim presjekom
$E$	N/mm <sup>2</sup>	modul elastičnosti / Youngov modul
$E_{REL}$	%	relativna pogreška
$h$	mm	visinska razlika od većeg do manjeg promjera konzole s promjenjivim poprečnim presjekom
$H/D$	-	omjer visine i promjera debla
$h/R$	-	omjer visinske razlike između različitih promjera i promjera zaobljenja prijelaza vratila s većeg na manji promjer
$I_y$	mm <sup>4</sup>	moment tromosti oko osi-y
$K_1$	-	integracijska konstanta jedan
$K_2$	-	integracijska konstanta dva
$K_t$	-	teoretski faktor koncentracije naprezanja
$K_\sigma$	-	efektivni faktor koncentracije naprezanja
$M$	Nmm	vanjski moment savijanja; moment opterećenja
$M_X$	Nmm	unutarnji moment u točki
$M_y$	Nmm	unutarnji moment savijanja oko osi-y
$r$	mm	polumjer provrta ploče
$R$	mm	polumjer zaobljenja
$U_1$	mm	pomak u smjeru x-osi
$U_2$	mm	pomak u smjeru y-osi
$U_3$	mm	pomak u smjeru z-osi
$u_i, v_i, w_i$	mm	komponente pomaka $i$ -tog čvora u Kartezijevom koordinatnom sustavu
$UR_1$	mm	zakret oko osi-x
$UR_2$	mm	zakret oko osi-y
$UR_3$	mm	zakret oko osi-z
$\mathbf{v}^T$	-	vektor stupnjeva slobode gibanja

---

$w$	mm	progib konzole
$\alpha$	rad	nagib konzole
$\rho$	mm	udaljenost od provrta ploče do infinitezimalnog dijela ploče
$\sigma$	N/mm <sup>2</sup>	naprezanje
$\sigma_{\max}$	N/mm <sup>2</sup>	maksimalno naprezanje
$\sigma_{\text{nom}}$	N/mm <sup>2</sup>	nominalno naprezanje dovoljno udaljeno od mjesta koncentracije naprezanja
$\sigma_X$	N/mm <sup>2</sup>	naprezanje po presjeku
$\sigma_{X,0}$	N/mm <sup>2</sup>	naprezanje u sredini presjeka
$\sigma_{X,C}$	N/mm <sup>2</sup>	naprezanje u točki C
$\sigma_{X,D}$	N/mm <sup>2</sup>	naprezanje u točki D
$\sigma_{X,E}$	N/mm <sup>2</sup>	naprezanje u točki E
$\sigma_{X,F}$	N/mm <sup>2</sup>	naprezanje u točki F
$\sigma_{\vartheta}$	N/mm <sup>2</sup>	azimutna komponenta naprezanja

## SAŽETAK

Tema ovog rada je numerička analiza konstrukcija oblikovanih metodom vlačnih trokuta. Metoda vlačnih trokuta je grafička metoda prvenstveno osmišljena za dizajnere i inženjere koji nemaju pristup skupim programskim alatima za analizu konstrukcija. Metoda vlačnih trokuta preuzeta je iz prirode tj. od drveća.

Cilj ovog diplomskog rada je da se za proizvoljno definirane dimenzije konzole promjenjivog poprečnog presjeka, gdje će prijelaz s većeg na manji promjer biti izveden kao kružno zaobljenje, eliptično zaobljenje te prijelaz definiran pomoću metode vlačnih trokuta, provede proračun čvrstoće pomoću programskog paketa *Abaqus*, te da se usporede dobiveni faktori koncentracije naprezanja. Rad je podijeljen na devet dijelova; poglavlja.

U prvom, uvodnom dijelu, ukratko je objašnjena problematika rada i stvoren uvod za daljnji rad.

U drugom dijelu, opisan je proces razvoja proizvoda i faze koje ga prate. Bilo je bitno da se u drugom dijelu rada opiše faza koncipiranja i stvaranja ideja, a jedan od dobrih načina prikupljanja ideja je priroda.

U trećem je dijelu opisana biomimikrija i neki od najbolje poznatih primjera biomimikrije pa tako i učenje od drveća što nam je stvorilo uvod za četvrti dio rada. U četvrtom dijelu detaljno je opisana sama metoda vlačnih trokuta i dani su razni primjeri njezine moguće primjene.

Peti dio sastoji se od analitičkog proračuna konzole opterećene na savijanje konstantnog poprečnog presjeka, a u šestom dijelu taj se analitički proračun potvrdio numeričkom analizom u programskom paketu *Abaqus*.

Sedmi dio, kao srž ovog rada, sadržavao je numerički proračun konzole opterećene na savijanje promjenjivog poprečnog presjeka. U ovom se dijelu također proračunao faktor koncentracije naprezanja; analitički i numerički.

U osmom dijelu radila se usporedba faktora koncentracije naprezanja za različite prijelaze; kružni prijelaz, eliptični prijelaz te za prijelaz definiran metodom vlačnih trokuta, a u devetom dijelu izveden je zaključak o dobivenim rezultatima.

**Ključne riječi:** razvoj proizvoda; biomimikrija; bionika; metoda vlačnih trokuta; numerička analiza konstrukcija; metoda konačnih elemenata; faktor koncentracije naprezanja.

## SUMMARY

The subject of this thesis is numerical analysis of structures designed by the method of tensile triangles. Method of tensile triangles is numerical method commonly used by designers and engineers who don't have access to expensive programs for numerical analysis. Method of tensile triangles is copied from trees.

The aim of this thesis is that for arbitrarily defined console dimensions with adjustable cross-section, where transition from bigger to smaller diameter will be designed like round fillet, elliptical fillet and fillet defined with method of tensile triangles, numerical analysis has to be conducted with software package *Abaqus*. At the end it is necessary to compare the resulting stress concentration factors. Whole thesis is divided into nine bigger parts.

In the first, introductory part, problems are briefly explained thus creating an introduction for further work.

In the second part, process of product design and development and stages that follow it are described. It was important that in this part of the thesis, stages of designing and creating ideas are described and one of the best ways to collect ideas is from nature.

The third part describes biomimicry and some of the best known examples of biomimicry including learning from trees thus creating an introduction to the fourth part of the thesis. In the fourth part, method of tensile triangles is described in detail and examples are given for the application of the method.

The fifth part consists of analytical calculation of bending console with constant cross-section, and in the sixth part this analytical calculation is confirmed by numerical analysis in the software package *Abaqus*.

The seventh part, as the core of this work, contained a numerical calculation of bending console with variable cross-section. In this section stress concentration factors have been calculated analytically and numerically.

In the eighth part, comparison of stress concentration factors for different fillets; circular fillet, elliptical fillet and the fillet defined with method of tensile triangles have been done and in the ninth part, conclusion was drawn about the results.

**Key words:** product development; biomimicry, bionics; method of tensile triangles; numerical analysis of structure; finite element method; stress concentration factor.

## 1. UVOD

Dolaskom računala te prihvatljivom cijenom stolnih računala za svakog čovjeka, omogućeno nam je korištenje istog u različite svrhe. Jedna od svrha je naravno da bi inženjeri lakše i brže mogli rješavati probleme s kojima se susreću pa tako i za numeričku analizu konstrukcija.

Numerička analiza prvenstveno se koristi, kao što i samo ime kaže, za proračun i analizu raznih konstrukcija. Numeričke metode vrlo su korisne inženjerima zbog zahtjeva za što manjim troškovima i što većom zaradom. Prije pojave računala i numeričkih metoda za analizu konstrukcija, jedini način za provjeru i analizu bili su analitički proračuni i eksperimentalna istraživanja. Odmah je jasno da su eksperimentalna istraživanja cijenovno skuplja od numeričke analize (često i pogubna za konstrukciju koja se testira) i upravo je zbog tog razloga danas numerička analiza tako popularna.

Kod softverskih paketa za numeričku analizu postoji jedan drugi problem, a to je cijena takvih alata. Cijena takvih programa je vrlo visoka i samo si velike kompanije i korporacije mogu priuštiti kupnju licenci za rad u takvim programima. Upravo je zbog tog razloga i nastala metoda vlačnih trokuta. Jedan od razloga i zašto je nastala metoda vlačnih trokuta je zbog toga što su ljudi uvijek promatrali i pokušavali kopirati prirodu.

Metoda vlačnih trokuta prvenstveno je zamišljena kao pomoć konstruktorima i dizajnerima kod konstruiranja i dizajniranja raznih konstrukcija. Metodu je otkrio njemački znanstvenik *Claus Mathheck* sa Sveučilišta *Karlsruhe*. Metoda je to koja vrlo dobro rješava probleme koncentracija naprezanja koje su glavni uzrok lomova konstrukcija. Metoda vlačnih trokuta je grafička metoda koja ne zahtjeva primjenu numeričke analize metodom konačnih elemenata već je njezina primjenjivost uočena u prirodi i može se pronaći u biljnom i životinjskom svijetu.

Ovaj rad provjerava izvedivost i isplativost metode vlačnih trokuta na primjeru jednostavne konzole s promjenjivim poprečnim presjekom. Provjeravanjem metode vlačnih trokuta numeričkom analizom omogućava konstruktorima i dizajnerima korištenje metode sa sigurnošću u njezinu isplativost i izvedivost. Jedan od primjera gdje se metoda vlačnih trokuta može iskoristiti i upotrijebiti je kod procesa razvoja proizvoda i to posebice kod dijela razvoja proizvoda koji se naziva koncipiranje. Sam proces razvoja kao i faze koje su nam potrebne da bi objasnili problematiku ovog rada biti će opisani u nastavku.

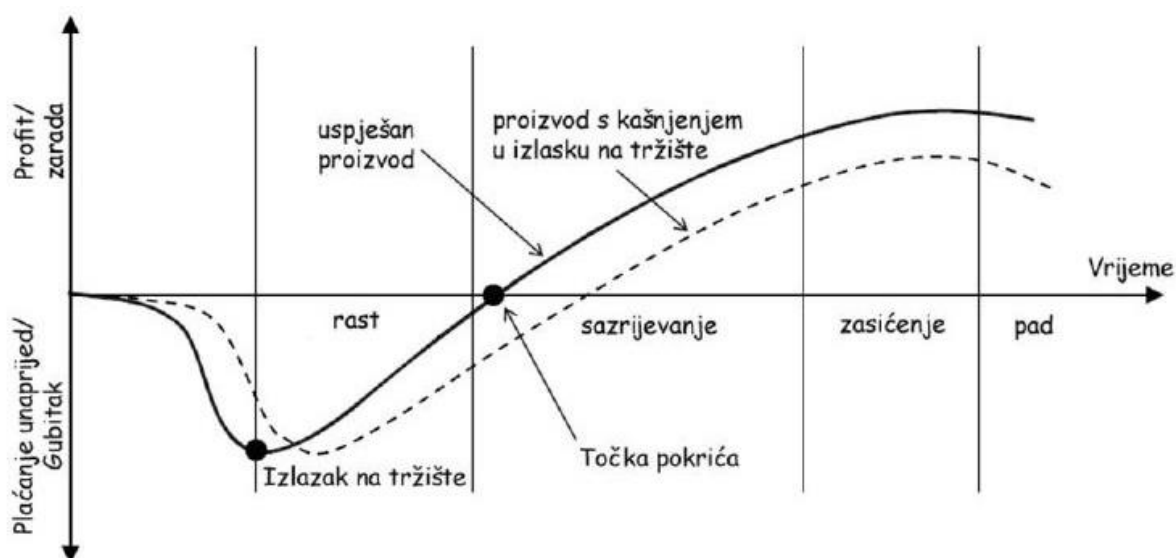
## 2. RAZVOJ PROIZVODA

Razvoj proizvoda (RP) skup je svih aktivnosti potrebnih da se neki koncept dovede u stanje spremno za tržište [1]. Zbog sve veće kompleksnosti proizvoda, u današnje je vrijeme proces razvoja proizvoda od izuzetne važnosti te mu se pridodaje puno pažnje. U proces razvoja proizvoda uključeni su gotovo svi sudionici: multidisciplinarni timovi, dizajn, konstrukcija, financije, nabava, proizvodnja, marketing, prodaja i drugi. Iako se može dobiti dojam da je previše ljudi iz različitih profesija uključeno u sam proces RP, to je u današnje vrijeme nužno. Proizvodi su postali toliko složeni i kompleksni da je potrebno rasčlaniti poslove razvoja na različite timove od kojih se svaki bavi svojim dijelom posla. Čest je primjer razvoja proizvoda u velikim tvrtkama koji se ne vodi samo u jednoj državi već je razvoj raspodijeljen tvrtkama koje se ne nalaze na istom geografskom položaju; vrlo često se tvrtke nalaze na drugim kontinentima. U slučajevima kao prije opisanim vrlo je bitna dobra komunikacija i suradnja između timova. Geografska udaljenost kao i vremenska razlika između timova često je velika prepreka u dobrom RP, no inženjeri i ostali sudionici u RP riješili su (barem donekle) i taj problem; npr. video pozivi i video konferencije. Još jedan problem kod takvih timova je pohrana podataka tj. pohrana podataka na jednom mjestu. Taj se problem u novije vrijeme riješio pomoću servera koji mogu pohraniti veliku količinu podataka dok je cijena takvih sustava konstantno padala.

Glavna stavka za mjerenje uspješnosti razvoja proizvoda je profitabilnost [1]. Danas je profitabilnost vrlo bitna zbog sljedećeg razloga. Razvoj proizvoda vrlo je skup i dugotrajan te može u velikoj mjeri „iscrpiti“ kompaniju; kako u financijskim tako i u ljudskim resursima. Zbog tog se razloga profitabilnosti posvećuje puno pažnje te se ona mjeri kako tokom, tako i nakon završenog RP. Računanje profitabilnosti vrlo je jednostavno i u završnici se računa na način da se od ukupnih prihoda dobivenih prodajom proizvoda oduzmu ukupni troškovi razvoja proizvoda [1]. O troškovima razvoja puno ovisi vrijeme razvoja koje igra ključnu ulogu. Ako npr. na tržište plasiramo proizvod prije nego je tržište (ljudi) spremno prihvatiti takav proizvod, ma koliko god proizvod bio dobar i kvalitetan, vrlo vjerojatno će profitabilnost biti mala ili nikakva. Profitabilnost će također biti mala ako proizvod stavimo na tržište prekasno s obzirom na potraživanje potrošača. Slika 1 prikazuje krivulju zarade odnosno gubitaka tokom životnog ciklusa proizvoda. Lijepo se vidi da i s malim zakašnjenjem proizvoda izlaskom na tržište gubitci mogu biti izuzetno veliki. Svakoj je kompaniji ključan čimbenik profitabilnost te je zbog



toga bitno dobro i kvalitetno poznavanje kompletnog RP. Na slici se također vidi da profit od određenog proizvoda dolazi tek nakon određenog vremenskog perioda nakon prodaje.



**Slika 1. Krivulja zarade tokom životnog ciklusa proizvoda [1]**

S ciljem čim kvalitetnijeg procesa razvoja proizvoda, sam proces podijelili smo na nekoliko etapa; faza. To su faza planiranja, koncipiranja, konstruiranja, faza konstrukcijske razrade i detaljiranja, faza ispitivanja i završna faza pripreme i puštanja u proizvodnju [1]. Podijeljenost razvoja proizvoda na ove faze omogućuje nam sustavno praćenje razvoja te sustavniji pristup samom konstruiranju proizvoda. Slika 2 prikazuje smjer procesa razvoja (od faze planiranja prema proizvodnji); važno je napomenuti da je sam proces RP iterativan te je vrlo često i uobičajeno u praksi višestruko vraćanje nekoliko koraka unazad da bi pronašli najbolje moguće rješenje tzv. iterativni postupak. U daljnjem će tekstu biti objašnjene neke od faza koje su nam potrebne da bi objasnili ovaj diplomski zadatak.



**Slika 2. Faze razvoja proizvoda [1]**

## 2.1. Planiranje

Prva faza razvoja proizvoda ili kako se često naziva nulta faza, obuhvaća sljedeće korake. Prvo je identificiranje mogućnosti/zadatka, zatim vrednovanje i rangiranje projekta, planiranje sredstava i vremena, detaljno planiranje projekta te na kraju refleksija na prijedlog i proces [1].

Identifikacija mogućnosti tj. zadatka može se dobiti iz postavljanja četiri glavnih pitanja: što, kada, gdje i kako. Identificiranje mogućnosti i točnog zadatka dobiva se također i preko znanja o potrebama i željama kupaca koje se dobiva preko upitnika i intervjua. U ovoj je fazi dobro i poželjno postavljanje kontrolnih točaka. Kontrolne nam točke služe za praćenje i pregled uspješnosti projekta. Za praćenje i pregled RP možemo se poslužiti prototipom proizvoda, eksperimentalnim rezultatima, analitičkim podacima, crtežima i skicama, kompjuterski renderiranim slikama modela proizvoda itd. U ovoj se fazi provodi i podjela projekta na manje zadatke što nam kasnije omogućuje lakše i sustavnije praćenje razvoja novog proizvoda [2].

U fazi planiranja raspoloživim sredstvima i vremenom, za svaki se zadatak definiraju resursi i vrijeme potrebni za započinjanje i završavanje istog. Resursi se odnose na ljude i njihove sposobnosti, opremu, materijal itd. Vrijeme se odnosi na dane ili tjedne koji su dodijeljeni nekom zadatku. U ovoj se fazi ne teži optimističnim procjenama (bilo vremena ili resursa) već realističnim koji nam daju čvrste temelje i uvid u izvedivost zadataka. U praksi je uobičajeno da su početne procjene u vremenu i resursima „pesimistične“ tj. potrebno je povećanje od 50 – 100% u vremenu i resursima zbog uobičajenih vremenskih kašnjenja [2].

Kod detaljnog planiranja projekta važno je razviti točan raspored za svaki zadatak projekta te je bitno odrediti veze i odnose između projektnih zadataka. Da bi to mogli napraviti dobro je postaviti si pitanja poput: koji se zadaci mogu započeti s trenutnim informacijama i resursima, koji su zadaci najrizičniji itd. [2].

Na kraju faze planiranja važno je napomenuti da je stalno praćenje napretka gotovo neizbježno. Napredak bi se trebao prikazivati grafički u funkciji vremena i resursa što omogućuje lakše shvaćanje i praćenje te je moguće, ako je to potrebno, raditi promjene u prvotnim planovima te dodavati informacije koje su bitne, a na samom početku planiranja nisu bile dostupne.

## **2.2. Koncipiranje**

Faza koncipiranja vrlo je zanimljiva za ovaj diplomski rad. Ova se faza može podijeliti na dva veća dijela. Prvi dio se odnosi na stvaranje koncepata i generiranje mogućih rješenja i to je dio koji nas zanima, dok se drugi dio odnosi na procjenu tj. evaluaciju i odabir koncepata [3].

Prema literaturi [3] traženje mogućih rješenja moguće je na tri načina: moguće je tražiti postojeća rješenja, mogu se generirati potpuno nova rješenja te se mogu kombinirati stara i nova da bi se na kraju odabrala najbolja rješenja.

Prednosti postojećih rješenja su manji troškovi te manji rizik kod implementacije, dok su nedostaci traženja postojećih rješenja manja inovativnost i teža prilagodba novim zahtjevima. Problem kod generiranja novih ideja može biti sam proces smišljanja novih ideja koji može biti vrlo težak zadatak [3]. Također nailazimo na neizvjesnot mogućih novih pristupa što kod ljudi izaziva strah i nelagodu. Takve je probleme kod smišljanja novih ideja moguće riješiti na način da se u sam proces uključi više ljudi koji surađuju u interdisciplinarnim timovima. U dobrim interdisciplinarnim timovima može doći do sinergije i dobrih ideja te je vrlo bitno korištenje prikladnih metoda za poticanje kreativnosti i inovativnosti od kojih će neke biti prikazane u nastavku.

Stvaranje koncepata odvija se pomoću metoda koje se dijele na dvije skupine. Prva skupina su metode prikupljanja i „*brainstorming*“ metode. Te se metode fokusiraju na kombiniranje trenutačno dostupne tehnologije te stvaranje ideja iz glava inženjera i ostalih sudionika (fizičara, znanstvenika, dizajnera itd.). Druga skupina metoda je poznata pod nazivom „*biasing*“ metode tj. napredne metode koje koriste fizikalne uvide i principe kao i već zabilježene i dokumentirane konstrukcijske principe za stvaranje koncepata [2].

### **2.2.1. Metode prikupljanja i „*brainstorming*“ metode**

Cilj metoda za prikupljanje rješenja i *brainstorming* metoda je sakupiti što je više mogućih ideja koje kasnije konvergiraju ka konačnom rješenju tj. proizvodu kojeg se može naći na tržištu. Što se prikupljanja potrebnih informacija tiče, najbolje je započeti određivanjem zahtjeva. Najlakše se do potrebnih zahtjeva dolazi analizom tržišta tj. kupaca. Analizirajući tržišnu populaciju (na koje dobne skupine ciljamo, spol kupaca), potrebe kupaca i stanje na tržištu, dobivamo vrijedne informacije. Naravno te informacije na kraju treba obraditi i dobro ih interpretirati ukoliko želimo dobiti korisne informacije. Najjednostavnije ispitivanje potencijalnih kupaca i tržišta radi se pomoću intervjua, raznih upitnika te stavljajući sebe u kontekst kupca tj. korisnika. Kod ovakvog prikupljanja informacija poznata je metodologija „5 koraka“ koja nam govori o redoslijedu od prikupljanja do definiranja tehničkih specifikacija proizvoda. Metodologija „5 koraka“ sastoji se od sljedećih koraka prema literaturi [3]:

- prikupljanje podataka,

- interpretiranje prikupljenih podataka,
- organiziranje potreba u hijerarhiju,
- uspostava relativne važnosti potreba,
- refleksija potreba na razvojni proces.

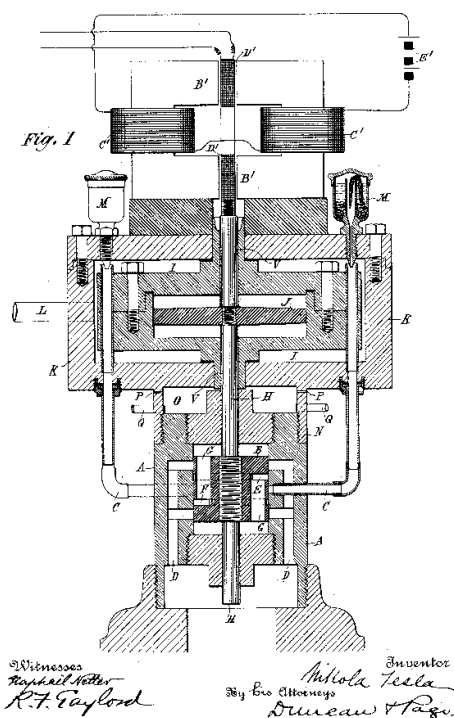
Kod ispitivanja tržišta pomoću anketa i intervjuva važno je sastaviti dobra pitanja koja će biti postavljena kupcima i potencijalnim korisnicima. Neka od klasičnih pitanja koja se gotovo uvijek pojavljuju su: kada i zašto koristite proizvod, koji su načini upotrebe proizvoda, koje su prednosti i nedostaci proizvoda, što bi vi voljeli promijeniti itd. [1]. Na ovakav način dobivamo informacije u pismenom obliku; ispitanici su samo ispunili anketu ili smo ih mi intervjuirali i zapisivali rečeno. Važno je imati na umu da korisnici i kupci u većini slučajeva nisu tehnički obrazovani i često njihove zahtjeve treba naknadno interpretirati na način koristan inženjerima i ostalim ljudima koji sudjeluju u potpunom razvoju proizvoda [1].

Drugi način pribavljanja potrebnih informacija je preko patentnih baza. Patent je isključivo pravo za izum koji nudi novo rješenje nekog tehničkog problema [1]. Danas, u 21. stoljeću svaka razvijena država ima svoj patentni ured. Ulaskom Republike Hrvatske u Europsku uniju došlo je do nekih pozitivnih promjena. Npr. ako patentiramo neki proizvod u Hrvatskoj, taj nam se patent prizna u svim članicama Europske unije što itekako smanjuje troškove patentiranja novih rješenja i proizvoda te se na taj način potiče patentiranje novih proizvoda i rješenja. Povijest patenata seže daleko u prošlost; prvi patent u Europi priznat je oko 1450. godine u Veneciji, dok prvi patent u SAD-u datira još iz 1790. godine [4]. Sama činjenica da se patentna baza održala ovako dugo govori nam da je ona vrlo velika i opsežna, a to nam dokazuje činjenica da postoji više od 70 000 kategorija u koje je moguće smjesiti razne izume, rješenja, ideje itd. Upravo su zbog toga patentne baze odličan izvor za prikupljanje ideja i informacija o novim i postojećim proizvodima. Ono u čemu nam patentne baze također pomažu je da svojim izumom ne „upadnemo“ u nečiji patent te na taj način prekršimo patentna prava zbog čega se snose novčane i kaznene odgovornosti. Slika 3 prikazuje patent elektrogeneratora Nikole Tesle iz 1894. godine.

Metode koje spadaju u *brainstorming* osim klasičnog *brainstorminga* uključuju i druge metode poput „6-3-5“ metode, morfološke matrice, mentalnih mapa i dr.

Klasični *brainstorming*, metoda je koja se koristi već dulje vrijeme i raširena je i poznata širom svijeta. Metoda je to koja okuplja ljude različitih profila iz različitih profesija koji tokom trajanja *brainstorminga* iznose svoje ideje koje se bilježe. Važna karakteristika klasičnog

*brainstorminga* je nekritiziranje ideja ostalih članova; strogo je zabranjeno ismijavanje i kritiziranje i komentiranje (bilo pozitivno, bilo negativno) tuđih ideja.



**Slika 3. Patent Nikole Tesle iz 1894. godine [5]**

„6-3-5“ metoda je jedna od metoda kojom se vrlo brzo dolazi do konkretnih koncepata. Metoda je to koja najčešće okuplja šestero ljudi (moguće od tri do osam članova). Svaki član na komad papira može napisati, nacrtati, ukratko objasniti tri ideje; crteža. Svaki član ima pravo držanja papira otprilike pet minuta, te ga nakon toga proslijeđuje drugom članu. Nakon 25 do 30 minuta vrlo se lako generira od 15 do 30 različitih koncepata [2].

### 2.2.2. Napredne metode – „biasing“ metode

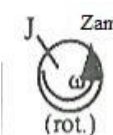
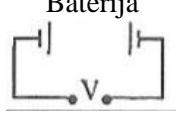
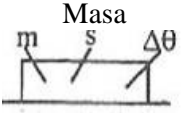
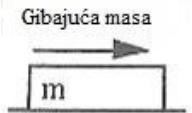
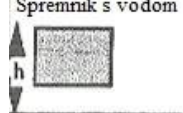
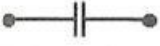
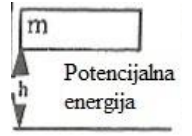
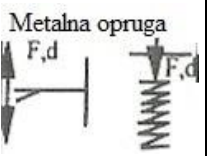
Kad se priča o naprednim metodama traženja rješenja misli se na postupak generiranja ideja na temelju fizikalnih efekata, korištenje klasificiranih shema te TIPS metoda (*Theory of Inventive Problem Solving*). U daljnjem tekstu ukratko će biti objašnjeno generiranje ideja na temelju fizikalnih efekata.

Svaki funkcionalni model nekog proizvoda ima svoje funkcije koje su međusobno povezane tokom materijala, energije i signala. Takav prikaz funkcija proizvoda naziva se funkcijska dekompozicija. Vrlo je važno kod funkcija proizvoda da se ulazni signal, materijal i energija transformiraju u novo stanje tj. ulazna i izlazna energija se moraju razlikovati (npr. ulaz je električna energija dok je izlaz mehanička rotacijska energija – dogodila se pretvorba

energije) [1]. Ta pretvorba predstavlja fizikalni proces koji je diktiran fizikalnim principima. Umjesto oslanjanja samo na intuitivne metode, možemo naći fizikalne principe koji mogu izvršiti jednu ili više funkcija nekog proizvoda. Pretpostavimo da imamo poznati fizikalni efekt opisan poznatim jednadžbama. U tom slučaju mi znamo broj i vrstu nezavisnih varijabli koje se mogu dodatno proučiti kako bi se generirali razni koncepti i rješenja na metodičan način [2]. Postoji nekoliko razloga za korištenje fizikalnih efekata. Prvi je razlog što se fizikalni problemi mogu riješiti fizikalnim principima. Drugi je razlog da se proizvodi mogu unaprijediti i postati inovativni optimizacijom i razumijevanjem na temelju fizikalnih efekata. Treći je razlog taj da se pretraživanjem rješenja među različitim fizikalnim efektima mogu otvoriti vidici i ukloniti mentalne blokade [3]. Tablica 1 prikazuje neke fizikalne principe za problem pohrane energije.

Vidimo da se energija prema ovoj tablici može pohraniti na četiri načina: mehanički, hidraulički, električki te termalno. Za svaki se od ova četiri principa daju konkretni primjeri u obliku jednostavnog crteža i kratkog i jasnog opisa crteža. Jedan od najpoznatijih softvera za traženje fizikalnih principa je *Goldfire* koji uz traženje fizikalnih principa pretražuje i sve svjetske patentne baze kao i znanstvene članke.

**Tablica 1. Fizikalni principi za problem pohrane energije [2]**

Tip energije Princip	Mehanički	Hidraulički	Električki	Termalno
1		Hidraulički spremnik		
2				Grijana tekućina
3		Tekući fluid	Magnet (mag. polje)	Pregrijana para
4				

Iz prijašnjeg smo teksta vidjeli razne metode traženja rješenja, bilo već postojećih ili traženja potpuno novih inovativnih rješenja. Kada govorimo o traženju novih rješenja, postoji još jedan gotovo neiscrpan izvor ideja i mogućih rješenja, a to je priroda. Kao što je u uvodnom dijelu spomenuto, priroda (bilo životinjski ili biljni svijet) oduvijek je bila inspiracija ljudima i često su ljudi promatrali prirodne procese i fenomene ne bi li im pomogli u rješavanju njihovih problema. Ta se grana naziva bionikom/ biomimikrijom te će biti detaljno objašnjena u sljedećem poglavlju kako bi mogli prikazati i pobliže objasniti odakle dolazi metoda vlačnih trokuta što je i tema ovog diplomskog zadatka.

### 3. BIOMIMIKRIJA

#### 3.1. Što je biomimikrija tj. bionika?

Pojam bionika je nastao spajanjem pojma biologija i tehnika. Cilj bionike nije u kopiranju prirode već korištenje prirodne evolucije kao inspiracije i stimulacije za generiranje inovativnih ideja i rješenja. Jedan od glavnih razloga zašto je priroda izvrstan izvor održivih rješenja je zbog toga što su osnovni principi koji u prirodi postoje sljedeći [3]:

- postizanje maksimuma s najmanjim utroškom energije,
- čuvanje resursa i kompletno recikliranje otpada.

Nikad prije u povijesti, biologija nije bila tako velika inspiracija za inovacije te je danas većina inženjera i znanstvenika toga i svjesna. Međutim, postoji jedan problem. Zbog velike kompleksnosti bioloških sustava, danas nema puno primjera uspješno i do kraja primjenjenih ideja iz prirode u tehnici. Zbog toga biomimikrija zahtjeva ne samo eksperimentalna istraživanja već i dobru strategiju za izvlačenje ključnih obilježja odgovornih za određene funkcije biološkog sustava. Posljedično tome, prije transformiranja bioloških principa u tehnologiju, bitno je prepoznati i razlikovati te principe u samoj kompleksnosti biološkog sustava. Ima nekoliko pristupa za rješavanje tog problema prema literaturi [6].

Prvi je pristup klasični biološki gdje se određeni funkcionalni sustav uspoređuje i promatra u raznim organizmima. U tom slučaju može se prepoznati isto funkcionalno rješenje koje je nastalo evoluiranjem u različitim grupama organizama. Takav komparativni pristup je vrlo dugotrajan, ali može biti veoma efikasan za bioinspiraciju koja kasnije može dovesti do biomimikrije [6].

Drugi se pristup temelji na konceptu modela organizma. Ovdje se umjesto raznolikosti organizma promatranog pomoću jedne ili dvije metode, primjenjuju različite metode na jedan određeni organizam/sustav. Takav nam pristup pomaže u otkrivanju širokog spektra detaljnih informacija o vezama sastava i funkcija u jednom sustavu [6].

Treći pristup počiva na teoretskom i numeričkom modeliranju. Pomoću virtualnih eksperimenata moguće je postepeno poboljšavanje našeg znanja o biološkim sustavima koje je moguće istražiti i ispitati pod puno različitih eksperimentalnih uvjeta [6].

Povijest biomimikrije seže daleko u povijest. Prvi pokušaji imitiranja prirode bili su kod pokušaja i želje za letenjem u staroj Grčkoj. Međutim prvi čovjek koji je letenju pristupio na



inženjerski način bio je *Leonardo da Vinci*. Promatrajući ptice i njihov let, *Leonardo da Vinci* je postao opčinjen idejom o letenju te postoji legenda kako je napravio krila koja je zakačio na leđa svog učenika u pokušaju da poleti. Kasnije su braća *Wright* bili prvi koji su poletjeli avionom koji je bio upravljan od strane čovjeka, a sve je počelo promatranjem krila i šupljih kosti ptica. Ostali primjeri biomimikrije koji će u nastavku biti prikazani novijeg su vijeka.

### 3.2. Primjeri biomimikrije

Vjerojatno najpoznatiji i najčešće korišten primjer biomimikrije je čičak. Čičak (eng. *burr*) je sjeme koje na sebi ima kukice tj. zube koji mu služe za hvatanje na odjeću ljudi ili krzno životinja u prolazu sa svrhom razmnožavanja raznošenjem sjemena na druga područja. *George de Mestral* šetajući planinama sa psom vidio je da mu je pas prekriven čičkom. Došao je doma i stavio čičak pod mikroskop te uočio male kukice. Naknadno je iskoristio ovo rješenje iz prirode za svoju inovaciju i nazvao je „*Velcro*“ (Slika 4). *Velcro* se sastoji od dva sloja: na jednom sloju se na tkanini nalaze kukice dok se na drugom nalazi tkanina s kovrčavim nitima. Danas se *Velcro* upotrebljava na gotovo svim odjevnim predmetima poput obuće i odjeće te se čak koristi i za spajanje dijelova na svemirskim satelitima itd. [7].



Slika 4. Velcro [8]

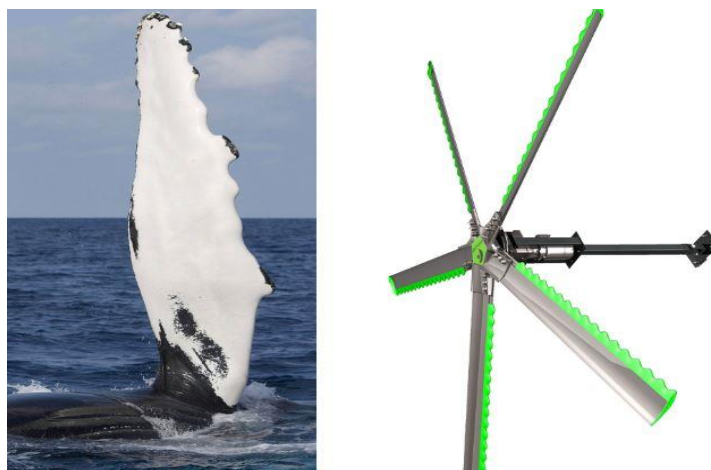
Jedan od najljepših primjera biomimikrije definitivno je konstrukcija japanskog *Shinkansen* vlaka (Slika 5). Brzi vlakovi mogu prouzročiti itekakve glavobolje zbog prevelike buke. To je posebice izraženo prilikom prolaska vlaka kroz tunel tj. kada vlak izlazi iz tunela. Zbog različitih tlakova medija (zraka), prilikom izlaska vlaka iz tunela dolazilo je do glasnih zvukova sličnih prasku groma. To je izuzetno plašilo ljude koji se jednostavno nisu htjeli voziti u takvim vlakovima što je bilo nepovoljno za japanske vlasti koje su uložile puno novaca u nove vlakove. Međutim, inženjeri su došli do rješenja koje su pronašli kod ptice. Ptica se zove vodomar (eng. *Kingfisher*) te ima specijalno „konstruiran“ kljun (Slika 5). Takav mu je kljun potreban jer vodomar jede ribe i zbog toga leteći zrakom zaranja u vodu da bi uhvatio ribu. Da bi vodomar mogao bez problema uletjeti u vodu i tako promjeniti medij bez da polomi kralježnicu uz minimalno prskanje vode tokom uranjanja, ovakav mu je kljun neophodan. Zbog

ovako konstruiranog vrha *Shinkansen* vlaka, dobio se tiši vlak koji troši 15% manje električne energije te koji putuje brzinama koje su do 10% veće od brzine vlaka bez tako konstruiranog vrha [8].



**Slika 5. Vodomar i Shinkansen vlak [8]**

Grbavi kitovi su iznenađujuće okretni plivači s obzirom na njihovu težinu koja iznosi oko 40 tona. Dio njihovih plivačkih mogućnosti moguć je zbog reda bradavičastih grebena; kvržica na prednjem rubu njihovih peraja [8]. Profesor *Frank Fish*, profesor biologije na *West Chester* Sveučilištu u Pensilvaniji otkrio je da se dodavanjem sličnih kvržica na lopatice vjetroturbine može smanjiti otpor, povećati brzina prilikom promjene brzine vjetra te povećati proizvodnja energije tj. ukupna efikasnost vjetroturbine i do 20%. Slika 6 prikazuje peraju kita kao i lopatice vjetroturbine tvrtke „*Envira North – Systems*“ [8].

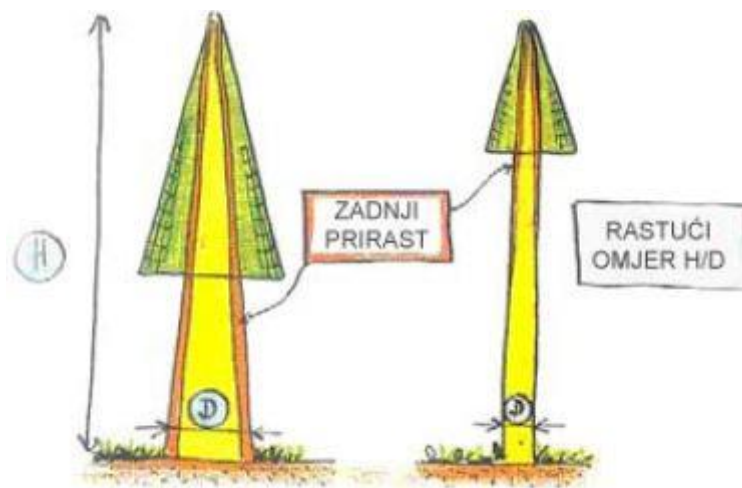


**Slika 6. Peraja kita i vjetroturbina tvrtke *ENS* [8]**

### 3.2.1. Učenje od drveća i kostiju

Učenje od drveća specijalizirani je i specifičan način biomimikrije gdje se principi drveća primjenjuju na ostale konstrukcije i proizvode. Drveće je tokom mnogo godina postojanja „naučilo“ razne trikove kako bi ostalo živo, kako da se obrani od oštećenja itd. U nastavku će biti prikazani neki specifični primjeri rješavanja problema pomoću ideja uzetih od drveća. Profesor *Claus Mattheck (Karlsruhe University)* jedan je od prvih ljudi koji su promatrali drveće i pronašli izuzetne načine poboljšanja tj. optimizacije današnjih konstrukcija i konstrukcijskih elemenata.

Jedan od dobrih primjera optimizacije (jednolika naprezanja u cijeloj komponenti) možemo vidjeti na deblu stabla. Ukoliko drveća imaju veliku krošnju, ojačava se stablo od tla prema vrhu tako da su u slučaju vjetrova naprezanja otprilike iste veličine uzduž cijelog debla. S druge strane, kada stabla rastu u šumi gdje su okružena drugim stablima, tada ona imaju male krošnje, a promjer debla ne raste dovoljno na bazi (donjem dijelu debla), te zbog toga postoji rizik od premale debljine debla (Slika 7). Istraživanja su pokazala da za stabla koja su rasla u okruženju s drugim stablima te im je time narušen omjer visine i promjera debla, ( $H/D$  veći od 50) uslijed jakog vjetrova doći će do njihovog naginjanja ili rušenja [9].

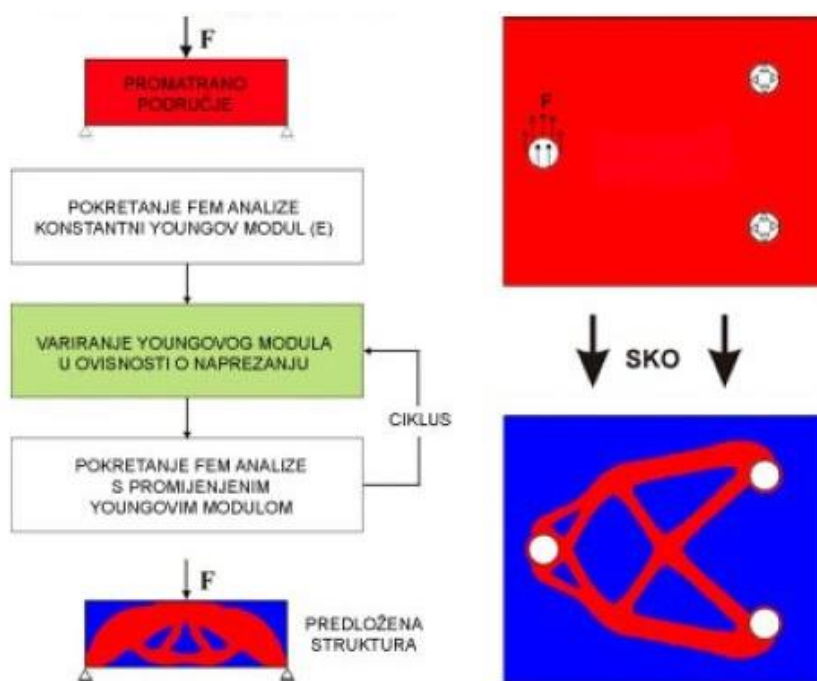


**Slika 7. Kršenje aksioma jednolike raspodjele naprezanja [9]**

Kao što je jasno iz gornje slike, drveće one dijelove svoje „konstrukcije“ koji su jače opterećeni ojačava, dok one dijelove koji su slabo ili nikako opterećeni oslabljuje. Sličan princip imamo i u kostima ljudi i životinja; kosti atletičara koji trči puno su čvršće i jače od kostiju plivača. Jasno je da se kod trkača javljaju veće sile, a time i veća opterećenja i naprezanja na kosti dok je kod plivača jasno da tijelo treba biti čim lakše što se najlakše postiže smanjenjem

mase kostiju. Upravo je na principu nastajanja strukture kostiju (mineralizacija) nastala *SKO* metoda tj. *Soft Kill Option*.

*SKO* metoda se koristi za konstruiranje laganih konstrukcija u industriji no za nju su potrebna računala i odgovarajući softver. Procedura zahtjeva primjenu metode konačnih elemenata i vrlo je jednostavna. Na početku se izračunava raspodjela naprezanja za početni neoptimirani oblik, dimenzije, oslonce i uvjete opterećenja koji odgovaraju stvarnim uvjetima u radu komponente. S obzirom na izračunata naprezanja, Youngov modul elastičnosti se povećava u područjima koja su više opterećena dok se smanjuje u područjima koja su manje opterećena. Područja koja su više opterećena se dodatno ojačavaju, a manje opterećena područja se oslabljuju. Taj je postupak iterativan i zahtjeva vremena da se nađe odgovarajuća struktura koja može izdržati zadana opterećenja uz istovremeno osjetno smanjenje mase [7]. Nakon svake iteracije pokreće se MKE numerička analiza da bi se izračunala naprezanja i pomaci. Slika 8, lijevo, prikazuje tok *SKO* metode dok je na desnoj strani prikazana optimalna struktura nosača.



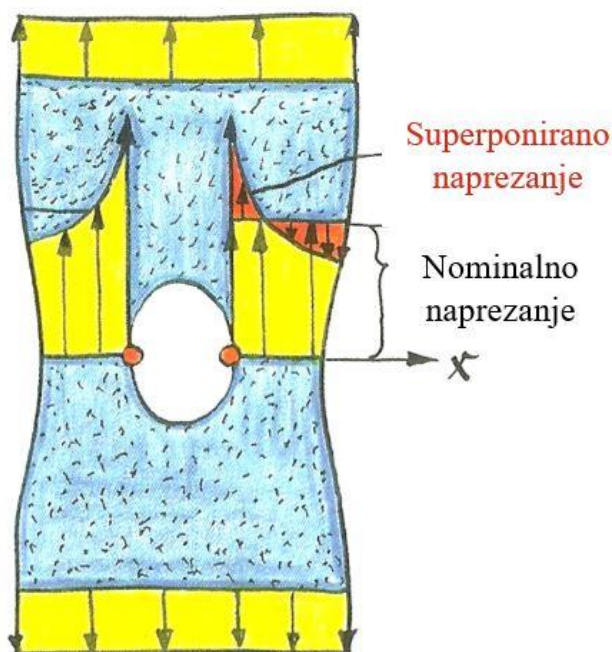
Slika 8. *SKO* metoda [7]

Problem koji se vrlo često javlja kod konstrukcija, a drveće je uspjelo riješiti, su koncentracije naprezanja. Koncentracija naprezanja javlja se najčešće na mjestima geometrijskih diskontinuiteta kao što su provrti, zarezi, smanjenje presjeka te se koncentracija naprezanja može javiti na mjestima gdje dolazi do visokog kontaktnog pritiska između dijelova. Naprezanje na mjestima koncentracije naprezanja može biti i nekoliko puta veće od nominalnog



naprezanja na mjestu dovoljno udaljenom od mjesta diskontinuiteta ili djelovanja koncentrirane sile (Slika 9). Naprezanje kraj rupe veće je jer je presjek manji, a time automatski raste naprezanje. Nadalje, drugi razlog zašto je naprezanje kraj rupe veće je taj što se nominalnom naprezanju pribraja i naprezanje zbog savijanja koje se javlja zbog deformacije kraj rupe [9]. Zbog toga takvo naprezanje i zovemo superponiranim.

Slika 10 prikazuje vratilo i mjesta na kojima se javlja koncentracija naprezanja. Vidimo da su to mjesta nagle promjene presjeka ili pak mjesta oštih utora. Dobar način detekcije mjesta na kojima se javlja koncentracija naprezanja je pomoću zamišljenih silnica. Općenito je pravilo da se smjer silnica ne smije naglo promijeniti te silnice ne smiju imati nagle skokove. Metoda pomoću koje je drveće riješilo problem koncentracije naprezanja naziva se „metoda vlačnih trokuta“ (MVT) i u nastavku će biti detaljno objašnjena.



Slika 9. Naprezanje membrane s rupom u sredini opterećene vlačno [9]

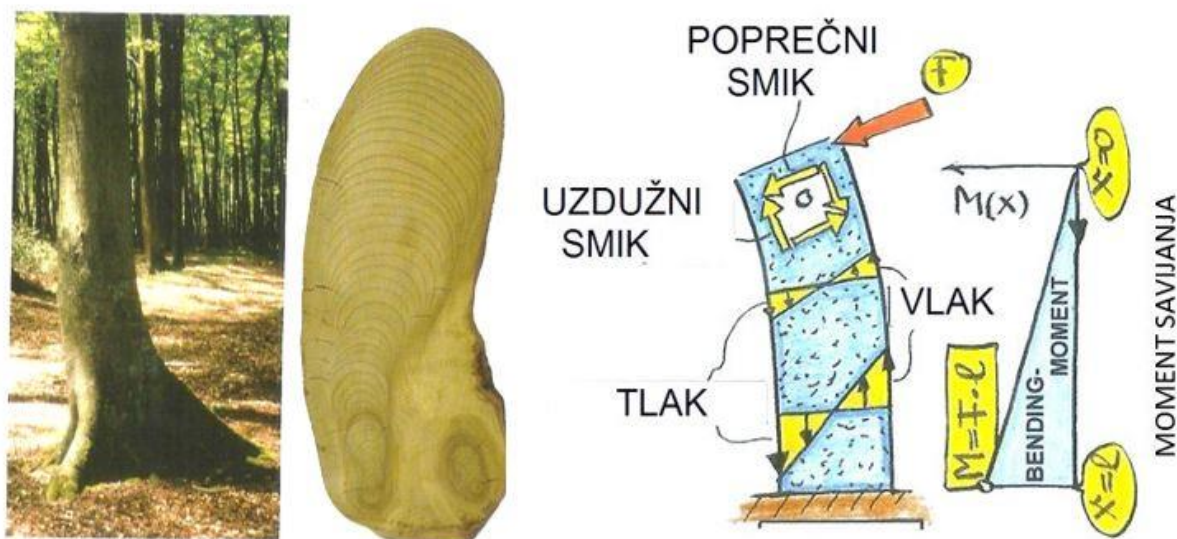


Slika 10. Mjesta koncentracije naprezanja kod vratila

## 4. METODA VLAČNIH TROKUTA

Metoda vlačnih trokuta prvenstveno je zamišljena kao pomoć konstruktorima i dizajnerima koji nemaju pristup računalu ili skupim programskim alatima za MKE (metoda konačnih elemenata) analizu. Metoda je to koja ne rješava sve probleme nastale zbog koncentracije naprezanja nastalih zbog ureza, ali rješava većinu njih.

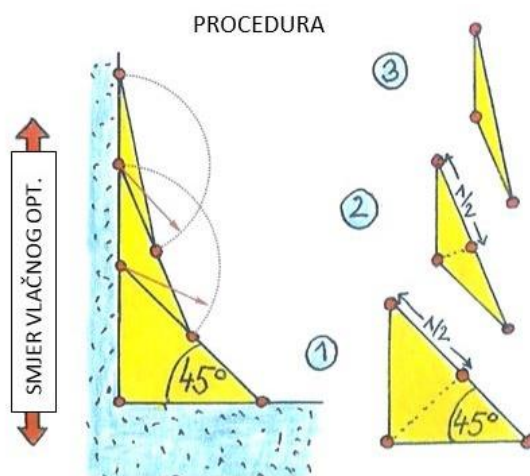
Na primjeru koji prikazuje slika Slika 11, možemo vidjeti kako drveće rješava problem opterećenja prilikom puhanja vjetra. Na donjem dijelu debla (uz zemlju) deblo je dodatno ojačano na vlačno opterećenoj strani tj. na onoj strani s koje pušu vjetrovi. Izgled tog ojačanja jako podsjeća na rebro, a djeluje kao vlačni trokut (eng. *tensile triangle*) (Slika 11 desno). Jednostavna je to grafička metoda za smanjivanje koncentracije naprezanja zbog postojanja ureza i uklanjanje potencijalnih mjesta na kojima može doći do pukotina [9]. Na slici 11 desno vidimo jednostavan primjer savijanja uklještene grede opterećene savojno te koja se naprezanja prilikom takvog opterećenja javljaju.



Slika 11. Izgled rebra lijevo; naprezanja tokom svijanja grede desno [9]

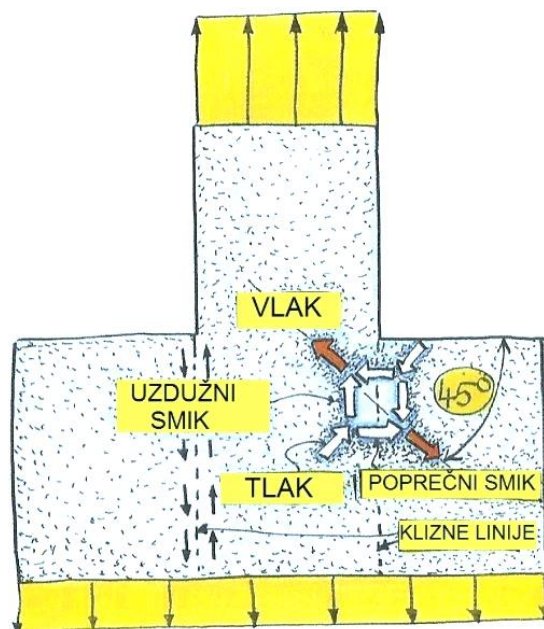
Procedura nastajanja i crtanja vlačnih trokuta prikazuje Slika 12. Trokuti su postavljeni simetrično u odnosu na kut. Prvo se crta donji trokut koji započinje kutom od  $45^\circ$  naspram baze. Već samo dodavanjem prvog trokuta smanjili smo početni oštar kut same komponente međutim to nije dovoljno. Nakon početnog trokuta dodaje se drugi trokut čiji početak počinje na polovini hipotenuze prvog trokuta te se treći trokut dodaje opet na isti način. U većini slučajeva tri su trokuta dovoljna i ne treba dodavati i četvrti. Nakon dodavanja vlačnih trokuta, mjesta na

kojima se ti trokuti spajaju treba zaobliti kako ne bi bilo grubog prijelaza s jednog trokuta na drugi. Vrlo je važno da se prvi trokut koji s bazom tvori kut od  $45^\circ$  ne zaobljuje.



**Slika 12. Procedura nastajanja vlačnih trokuta [9]**

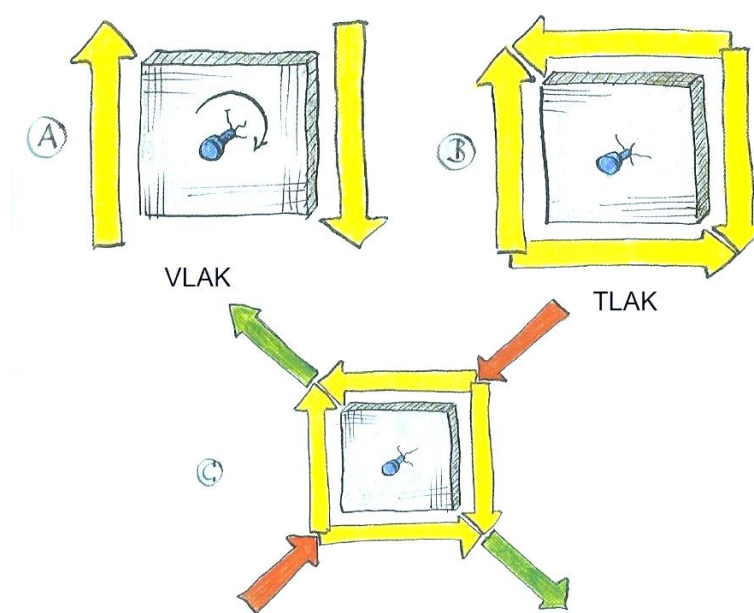
Zašto baš kut od  $45^\circ$  na dnu koji se ne smije zagladiti? Objašnjenje prikazuje Slika 13. Ako zamislimo linije klizanja, tada crvene strelice pokazuju smjer glavnih tangencijalnih naprezanja, a u blizini ureza ona su postavljena pod kutem od  $45^\circ$  naspram osi grede. To nam govori da za prikazan smjer opterećenja (vlak) odgovara kut od  $45^\circ$  na mjestu suženja poprečnog presjeka.



**Slika 13. Smjer glavnih tangencijalnih naprezanja [9]**

Da bi se još detaljnije objasnilo zašto kut od  $45^\circ$  potrebno je zamisliti rotirajuću kvadratnu ploču (Slika 14). Ako na takvu ploču djeluje uzdužni smik (Slika 14 A), tada će se ploča rotirati

u smjeru kazaljke na satu. Ako na toj istoj ploči počne djelovati poprečni smik jednake veličine u suprotnom smjeru (Slika 14 B) u tom se slučaju ploča neće rotirati i tada je uzdužni smik jednak poprečnom smiku. Vlačna i tlačna naprezanja pod kutom od  $45^\circ$  u tom su slučaju jednaka po veličini smičnim naprezanjima (Slika 14 C) [9]. Ovaj se problem može pojasniti i pomoću Mohrove kružnice gdje se lijepo vidi da su maksimalna posmična naprezanja za ovakav slučaj pod kutom od  $45^\circ$  [10].

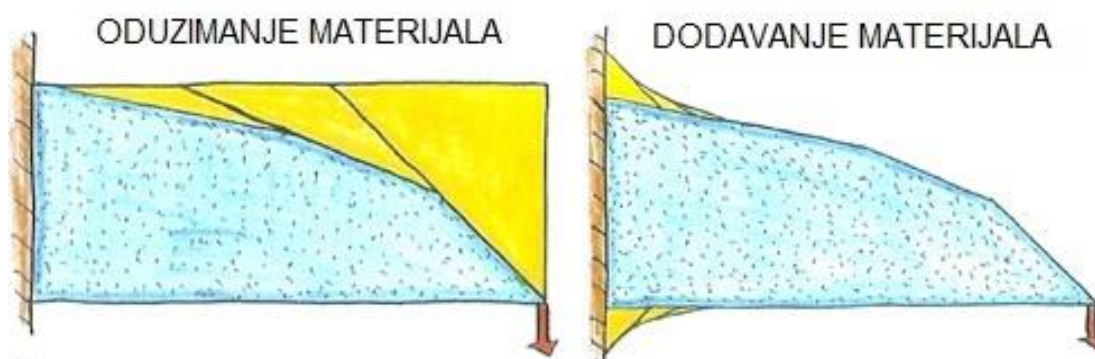


Slika 14. Rotirajuća kvadratna ploča [9]

#### 4.1. Primjena metode vlačnih trokuta

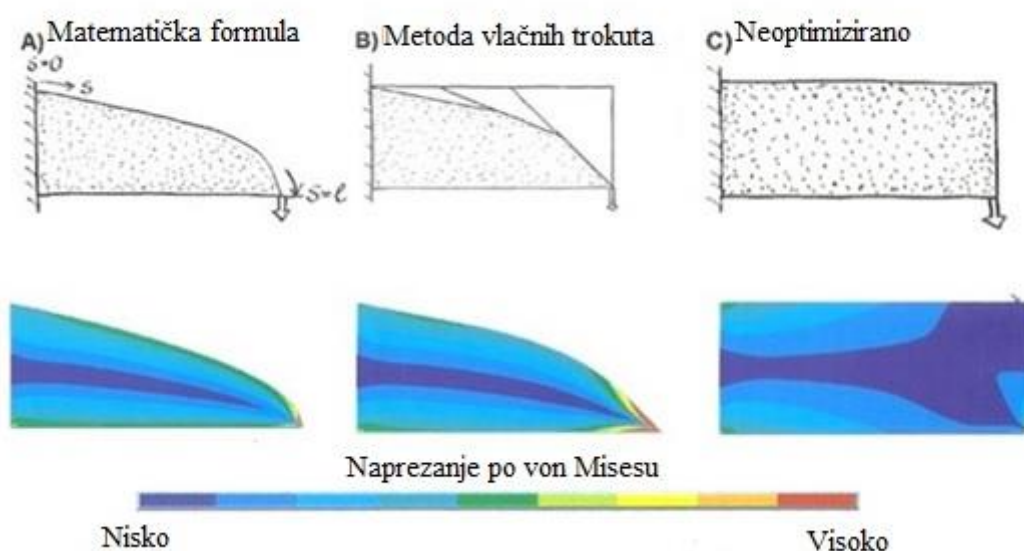
Pomoću metode vlačnih trokuta mogu se ukloniti dijelovi konstrukcije koji nemaju nikakvu funkciju (eng. *idlers*); dijelovi koji se nalaze na rubovima konstrukcijskih komponenata. Slika 15 prikazuje konzolu opterećenu na savijanje te mjesta gdje se uklanjaju ne-noseći rubovi. Ovaj princip možemo zamisliti i kao smanjivanje dimenzija konstrukcija opterećenih puno manje od dopuštenog opterećenja [9]. Ovaj princip ne može se naći kod drveća, ali zato stanice osteoklasta u kostima itekako koriste ovaj princip. Slika 15 lijevo prikazuje smanjivanje dimenzija i uklanjanje nepotrebnog dijela konstrukcije pomoću metode vlačnih trokuta dok Slika 15 desno prikazuje dodavanje dijela konstrukcije za smanjenje koncentracije naprezanja zbog geometrijskog diskontinuiteta. I ovdje je važno da se poštuje kut od  $45^\circ$  zbog prije spomenutih razloga.





**Slika 15. Metoda vlačnih trokuta za konzolu opterećenu na savijanje [9]**

Da se potvrdi uspješnost MVT koristi se metoda konačnih elemenata. Slika 16 prikazuje upravo uspješnost metode vlačnih trokuta u slučaju uklanjanja neopterećenih dijelova konstrukcija. Prvi primjer (Slika 16 (A)) služi nam za uspoređivanje jer je takav oblik konzole dobiven matematičkom formulom za konturu konzole opterećene na savijanje. Model u sredini (Slika 16 (B)) konstruiran je pomoću MVT te kao i model dobiven matematičkom formulom pokazuje ujednačenu distribuciju naprezanja osim na mjestu djelovanja sile na kojem MKE metoda uvijek pokazuje veliko naprezanje i posljedično tome crvenu boju. Na desnoj slici (Slika 16 (C)) gdje je prikazana neoptimizirana konzola jasno su vidljivi veliki dijelovi tamno plave boje koja označava mjesta izuzetno malih naprezanja; neujednačenost stanja naprezanja po cijeloj konstrukcijskoj komponenti.

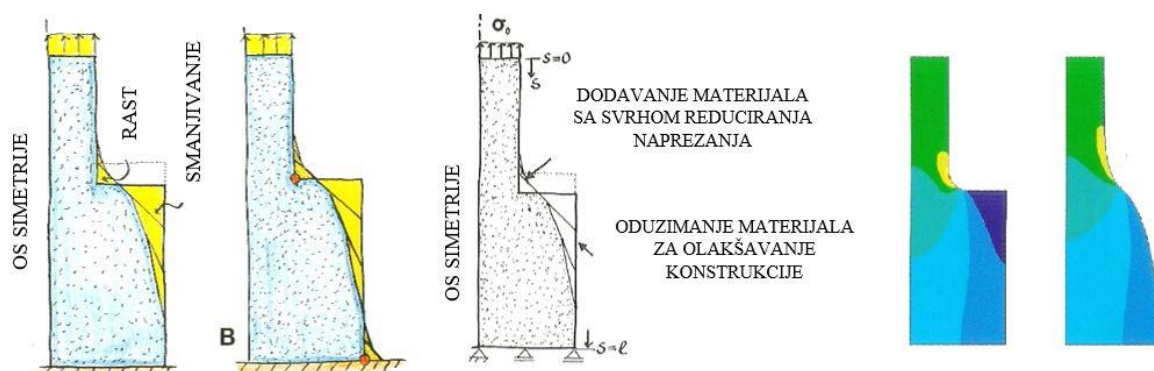


**Slika 16. MKE analiza različitih oblika konzole [9]**

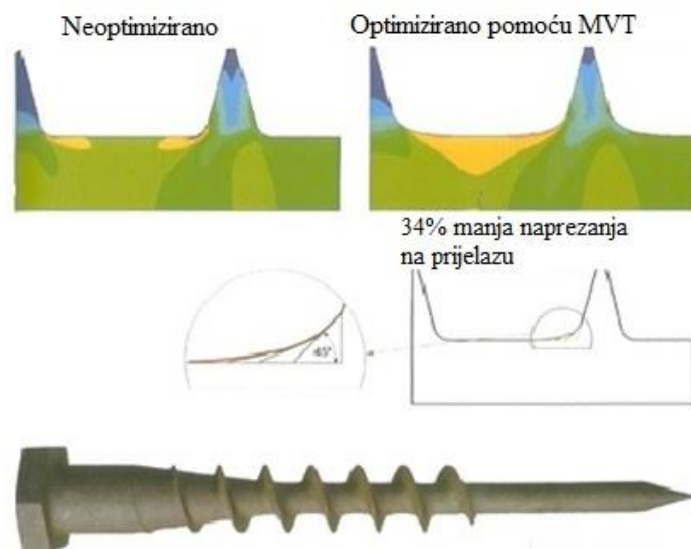
Slika 17 pokazuje kako je moguće u potpunosti oblikovati komponentu na mjestu promjene poprečnog presjeka metodom vlačnih trokuta tj. i prilikom dodavanja materijala na

mjestu velikih naprezanja i prilikom oduzimanja materijala na mjestima vrlo malih/zanemarivih naprezanja. Uspješnost metode i ujednačenost naprezanja po čitavom presjeku potvrđeno je i metodom konačnih elemenata.

Na primjeru vijka sa samoreznim navojem moguće je također vidjeti primjenu i opravdanost metode vlačnih trokuta na spoju zavojnice (navoja) i stabla vijka (Slika 18). Na slici vidimo dva primjera vijka, tj. prijelaz zavojnice i stabla proračunatih metodom konačnih elemenata. Jasno je vidljivo da je puno bolje ako taj prijelaz izvedemo metodom vlačnih trokuta; približno 34% su manja naprezanja na tom prijelazu u odnosu kada je prijelaz zaobljen običnim kružnim zaobljenjem. Slika 18 također pokazuje da je raspored vlačnih trokuta postavljen paralelno s osi vijka jer tok silnica prolazi uzduž stabla vijka [9]



Slika 17. Kontinuirana promjena poprečnog presjeka [9]

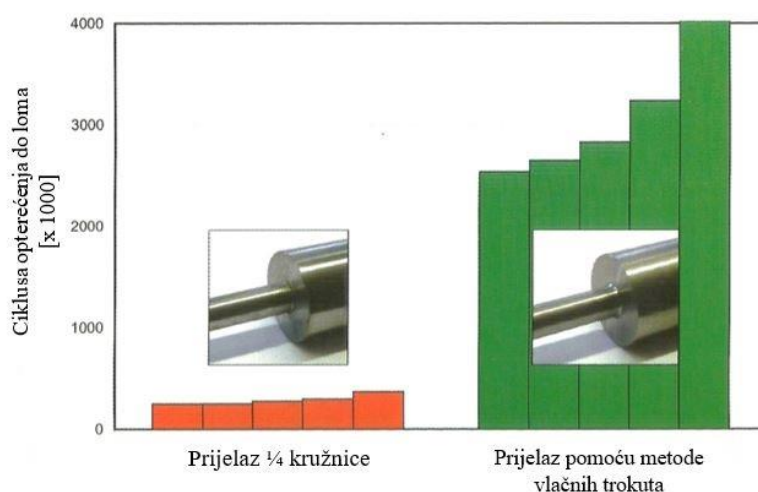


Slika 18. Primjer optimalnog spoja navoja i stabla vijka [9]

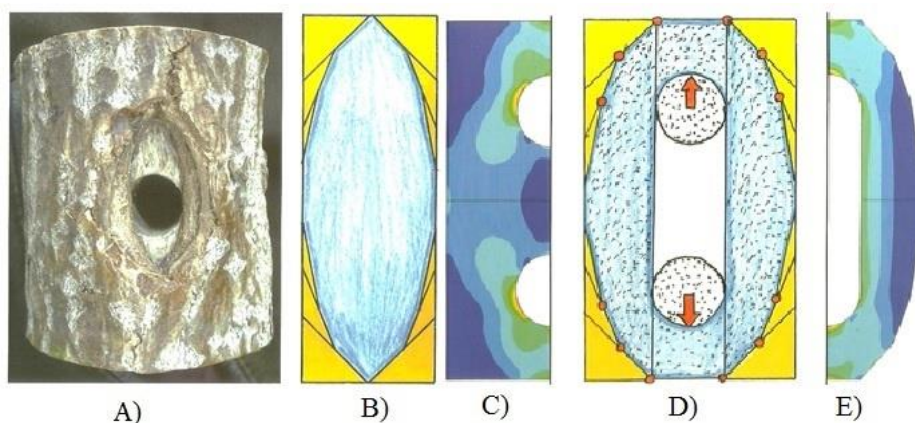
Opravdanost metode vlačnih trokuta potvrđena je i eksperimentalnim ispitivanjima (Slika 19). Kada je prijelaz s manjeg na veći promjer vratila ili osovine izveden metodom vlačnih

trokuta, pokazano je da je dio izdržao deset puta više ciklusa savijanja od dijela na kojem je taj prijelaz izveden s kružnim zaobljenjem ( $1/4$  kružnice) [9].

Slika 20 A) prikazuje stablo u kojem je ptica napravila kružni oblik te je moguće vidjeti oblik otvora koji je prihvatljiv stablu s obzirom na naprezanja koja se javljaju uslijed opterećenja djelovanjem vjetra. Kako je stablo raslo, otvor u kori debla poprimio je optimalni oblik koji neće izazvati njezino daljnje širenje i pucanje. Takav oblik moguće je dobiti metodom vlačnih trokuta primjenjenih na pravokutni otvor (Slika 20 B)). Ukoliko se želi optimalno oblikovati ploča u kojoj se nalazi otvor koji je vlačno opterećen (Slika 20 D)) tada se također može primjeniti metoda vlačnih trokuta. Analiza naprezanja metodom konačnih elemenata pokazuje da se na taj način uklanjanju dijelovi konstrukcijske komponente u kojima su naprezanja neznatna. Slika 20 C) prikazuje rubove tamno plave boje koja simbolizira izuzetno mala ili nikakva naprezanja dok je na slici E) vidljivo da smo se riješili nepotrebnog dijela slabo opterećene konstrukcije.



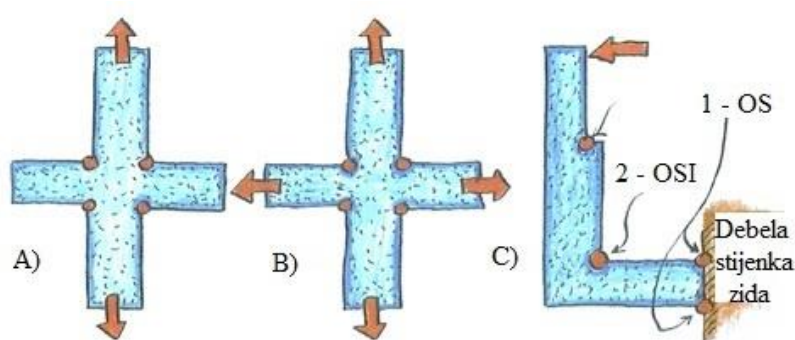
**Slika 19. Rezultati eksperimenta [9]**



**Slika 20. Optimalan oblik otvora kod drveta [9]**

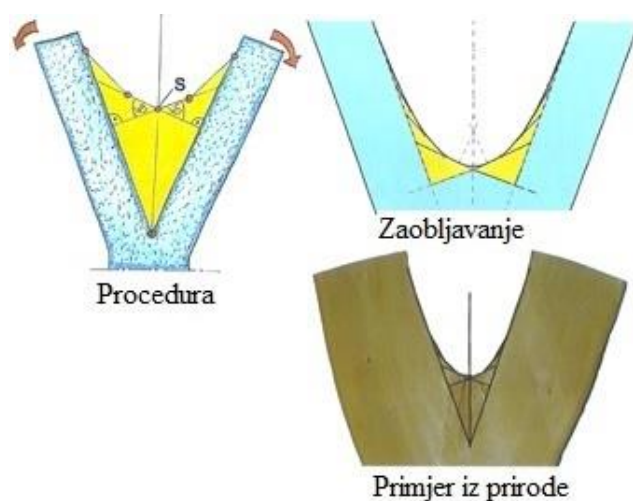
#### 4.2. Primjena metode vlačnih trokuta u slučaju dvoosnih opterećenja

Na primjerima do sada prikazano je bilo optimiziranje prijelaza i ureza na komponentama koje su bile opterećene jednoosno (Slika 21 A). U ovom se poglavlju želi pokazati primjenjivost metode vlačnih trokuta i u slučaju kada su komponente opterećene biaksijalno (u smjeru dvije osi), ali i kada je komponenta na jednom mjestu opterećena jednoosno, a na drugom mjestu opterećena dvoosno (Slika 21 C). Ako je zid na koji je pričvršćena konstrukcija tanak i zbog toga i sam opterećen na savijanje u tom se slučaju prijelaz optimizira kao da je opterećenje dvoosno; kada je zid dovoljno debeo, prijelaz se optimizira kao da je opterećenje jednoosno [9].



Slika 21. Jednoosno, dvoosno i kombinirano opterećenje [9]

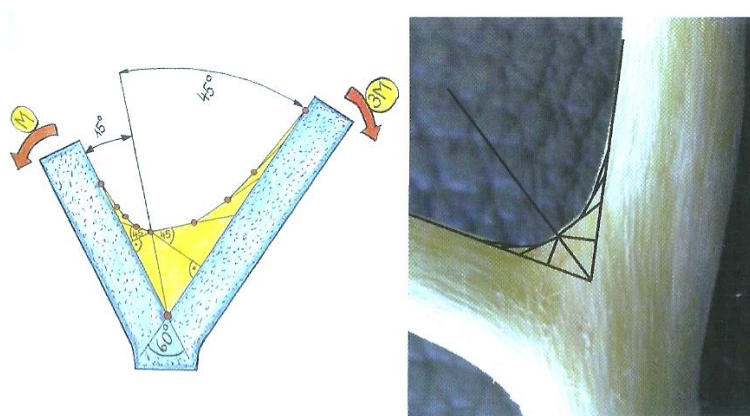
Kod dvoosnog opterećenja kao na primjeru „V“ spoja dvije grane stabla (eng. *fork*), potrebno je napraviti zaobljenje na mjestu spoja (Slika 22). Ako su opterećenja na obje strane jednaka, moguće je primijeniti metodu vlačnih trokuta za oblikovanje spojnog mjesta na način kao što je prikazano (Slika 22). Koliko će se visoko postaviti okomice od kojih se postavljaju vlačni trokuti ovisi o raspoloživom mjestu i funkciji komponente. Smještaj fiksne točke „S“ poželjan je da bude čim više, ako to dopušta geometrija i funkcija [9].



Slika 22. Optimalan spoj dvoosno opterećene komponente [9]



U slučaju kada su opterećenja u dvije osi međusobno različita (kada je jedna strana „vilice“ više opterećena), također se može primjeniti metoda vlačnih trokuta. Prirodno je da ona strana koja je više opterećena treba i više materijala za podnašanje opterećenja; nejednolika raspodjela opterećenja se u prirodi trudi itekako izbjegavati. Kao što je na slici prikazano, središnjica koja razdvaja područja vilica nalazi se pod kutom od  $45^\circ$  naspram jače opterećene vilice i pod kutom od  $15^\circ$  naspram slabije opterećene vilice. Ova razlika od tri puta ( $45:15$ ) naravno nije slučajna već je razlog tome što je opterećenje vilica također u omjeru 1:3 (Slika 23).



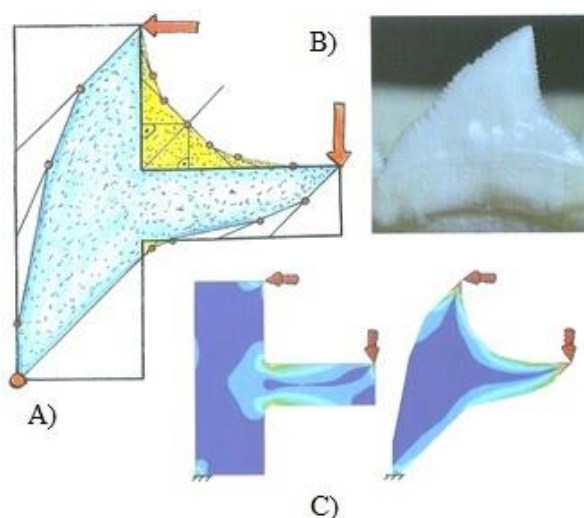
**Slika 23. Spoj dviju grana stabla različito opterećenih [9]**

Primjena metode vlačnih trokuta može se vidjeti i kod životinja i to npr. kod kandža crnog medvjeda (Slika 24 desno) te kljova bradavičaste svinje (Slika 24 lijevo). Uslijed opterećenja prikazanog crvenom strelicom (Slika 24 desno), naprezanja u konkavnom dijelu kandže crnog medvjeda višestruko su veća od naprezanja na konveksnom dijelu zbog koncentracije naprezanja na rubovima. Primjenom metode konačnih trokuta, na konkavnom dijelu koji je preopterećen se dodaje materijal, a na konveksnom dijelu koji je nedovoljno opterećen se oduzima dio materijala čime se dobiva optimalno oblikovana kandža tj. jednolika raspodjela opterećenja. Ista je procedura i za kljovu bradavičaste svinje (Slika 24 lijevo) [9].



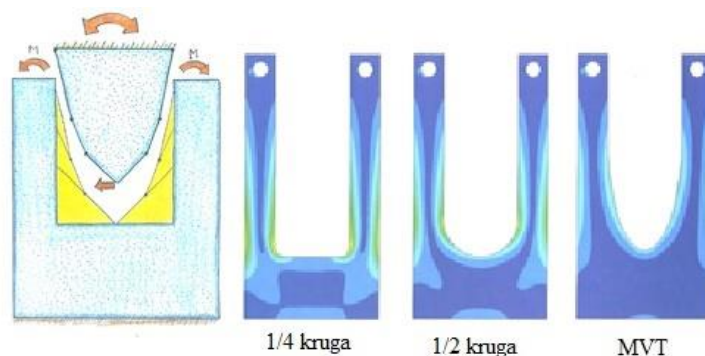
**Slika 24. Primjer optimalnih zakrivljenih „nosača“ [9]**

Još jedan primjer zubiju kod životinja savršeno nam prikazuje primjenu metode vlačnih trokuta; zubi morskog psa. Slika 25 B) prikazuje stvaran zub morskog psa, dok Slika 25 A) prikazuje optimiranje zuba pomoću metode vlačnih trokuta. Zub je opterećen u dvije osi jednoliko. Slika 25 C prikazuje proračun naprezanja zuba pomoću metode konačnih elemenata. Slika 25 C s lijeve strane prikazuje primitivan oblik zuba te se naknado na takav oblik primjenjuje metoda vlačnih trokuta da bi se dobio „savršeni“ oblik zuba. Takav „savršeni“ oblik zuba pokazuje uštedu mase do 30% te smanjenje naprezanja do 50% [9].



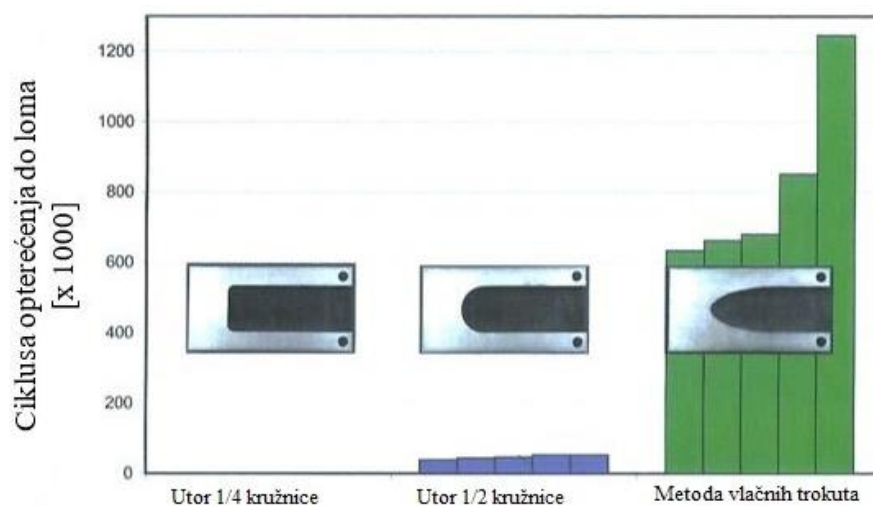
**Slika 25. Zub morskog psa [9]**

U slučaju da su obje ruke vilice paralelne jedna naspram druge, tada to možemo promatrati kao dvije grede koje se nalaze jedna kraj druge (Slika 26). Počevši od sredine vilice, vlačni trokuti grade se simetrično s obje strane te se, naravno, na kraju oštri prijelazi zaoble. Na taj se način dobiva vilica praktički slobodna od koncentracija naprezanja što je prikazano pomoću MKE analize za tri različite izvedbe vilice. Najmanja naprezanja su na vilici koja je izvedena pomoću metode vlačnih trokuta te su naprezanja u tom slučaju jednoliko raspoređena po cijelom presjeku (Slika 26).



**Slika 26. Oblikovanje vilice [9]**

Na slici 27 prikazani su rezultati eksperimenata za tri različito oblikovane vilice koje su bile podvrgnute promjenjivom dinamičkom opterećenju. Prva vilica koja ima oblikovan utor samo pomoću  $\frac{1}{4}$  kruga doživjela je plastičnu deformaciju već nakon nekoliko ciklusa opterećenja, vilica kod koje je utor oblikovan polukružno izdržala je 15 puta manje ciklusa od vilice koja je oblikovana po principu metode vlačnih trokuta.



Slika 27. Podaci eksperimenta za zamornu čvrstoću vilice [9]

## 5. ANALITIČKI PRORAČUN SAVOJNO OPTEREĆENE KONZOLE KONSTANTNOG POPREČNOG PRESJEKA

Zadatak ovog diplomskog rada je proračun naprezanja te usporedba faktora koncentracije naprezanja za konzolu opterećenu na savijanje. Taj će se proračun izvoditi na konzoli promjenjivog poprečnog presjeka da bi se dobio faktor koncentracije naprezanja kao i najveće naprezanje na mjestu geometrijskog diskontinuiteta.

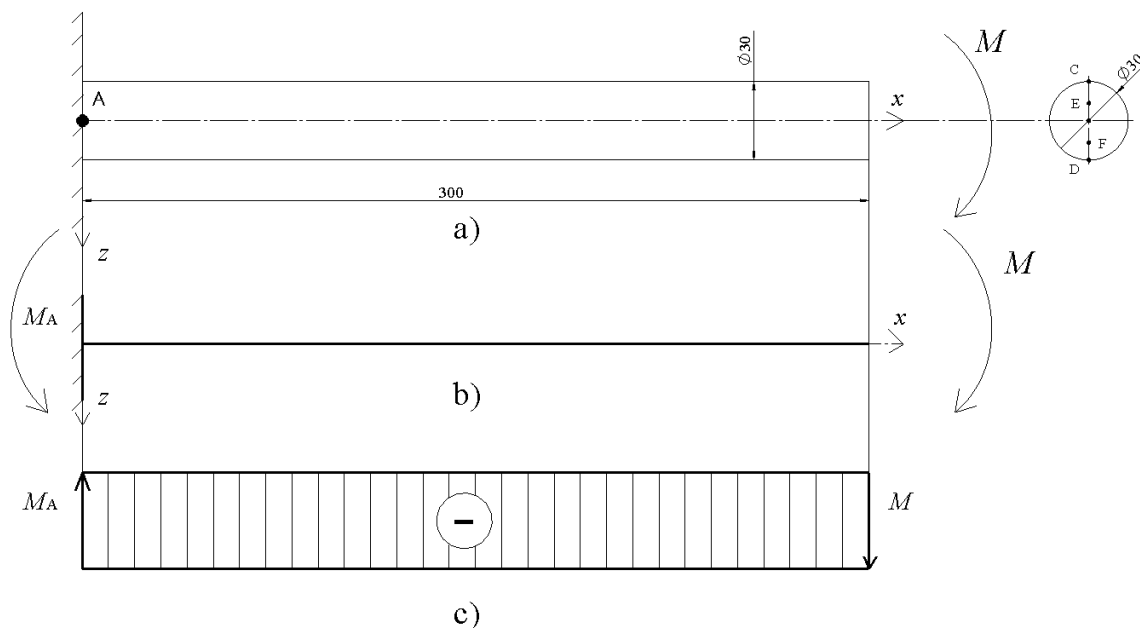
Za početak će se provesti analiza naprezanja i pomaka u programskom paketu *Abaqus* za jednostavan primjer savojno opterećene konzole konstantnog poprečnog presjeka. Razlog tome je postojanje analitičkih izraza za savijanje konzole konstantnog poprečnog presjeka i mogućnost usporedbe analitičkih rezultata s rezultatima dobivenim u programskom paketu *Abaqus*. Na taj će se način pokazati poznavanje rada u programskom paketu *Abaqus* te će se verificirati dobiveni rezultati.

Slika 28 prikazuje konzolu opterećenu na savijanje. Za opterećenje je odabran moment umjesto sile da bi eliminirali utjecaj naprezanja smicanja koja se javljaju u slučaju savijanja konzole koncentriranom silom. Nadalje, da bi mogli koristiti formule za naprezanja i pomake prema [10] vrlo je bitno poštovati omjer duljine i širine presjeka konzole. Iako je prema literaturi [10] poznato da taj omjer ( $d/l$ ) mora biti između 0,2 i 0,25, prema literaturi [13] bolje je da taj omjer iznosi 0,1, tj.  $d/l = 1/10$ . Duljina konzole u ovom zadatku iznosi 300 mm, a širina ili bolje rečeno promjer konzole iznosi 30 mm (konzola kružnog presjeka) tako da je potrební omjer u definiranim granicama. Slika 28 a) prikazuje opterećenu konzolu, Slika 28 b) prikazuje reakcije koje se javljaju dok Slika 28 c) prikazuje dijagram unutarnjih momenata. Ostali parametri važni za proračun su Youngov modul koji iznosi 200 000 MPa te moment savijanja koji iznosi 300 000 Nmm.

U nastavku je prikazan proračun savijanja konzole na način prema literaturi [10]. Slika 28 prikazuje konzolu kod koje su osi koordinatnog sustava postavljene prema literaturi [10] čime je definiran smjer pozitivnog tj. negativnog momenta. Za slučaj kao na slici, savojno naprezanje se prema literaturi [10] računa prema formuli:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z. \quad (1)$$





Slika 28. Dijagram reakcija i unutarnjih momenata konzole opterećene na savijanje

Raspisivanjem formule za moment tromosti  $I_y$  dobiva se:

$$\sigma_x = \frac{M_A}{\frac{\pi \cdot d^4}{64}} \cdot z . \quad (2)$$

Uvrštavanjem vrijednosti za  $M_x = M = 300\,000\text{ Nmm}$ , za točku C,  $z = 15\text{ mm}$  pa je naprezanje savijanja:

$$\sigma_{x,c} = \frac{-300000}{\frac{\pi \cdot 30^4}{64}} \cdot (-15) = 113,18\text{ MPa} . \quad (3)$$

Nakon izračunavanja nominalnog naprezanja, izračunati će se naprezanja u središtu kružnog presjeka ( $z = 0\text{ mm}$ ) kao i na polovici presjeka ( $z = 7,5\text{ mm}$ ) (Slika 29).

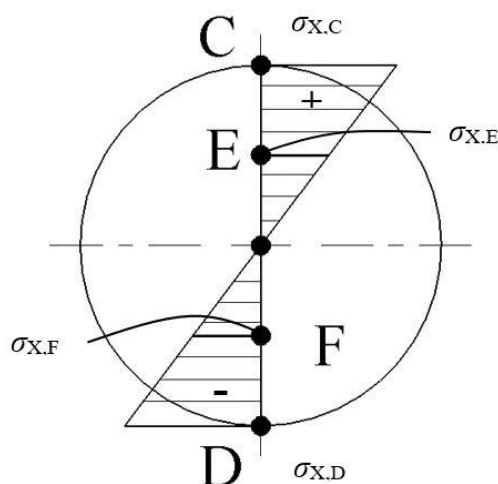
$$\sigma_{x,0} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z . \quad (4)$$

Uvrštavanjem brojeva za  $z = 0\text{ mm}$  dobiva se:

$$\sigma_{x,0} = \frac{-300000}{\frac{\pi \cdot 30^4}{64}} \cdot 0 = 0\text{ MPa} . \quad (5)$$

Uvrštavanjem brojeva za  $z = -7,5$  mm dobiva se:

$$\sigma_{X,E} = \frac{-300000}{\frac{\pi \cdot 30^4}{64}} \cdot (-15) = 56,59 \text{ MPa} . \quad (6)$$

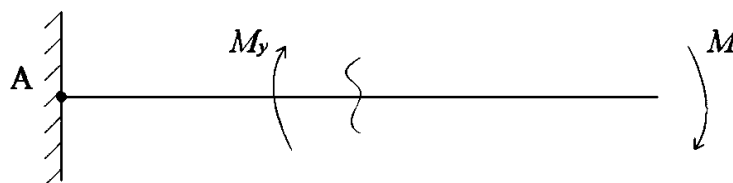


**Slika 29. Prikaz naprezanja po presjeku**

Nakon izračunavanja naprezanja savijanja na raznim dijelovima presjeka, izračunati ćemo i pomake. Računanje pomaka prema literaturi [10] moguće je na dva načina:

- preko diferencijalne jednadžbe elastične linije te,
- preko metode analogne grede.

U nastavku će biti prikazan izračun pomaka za konzolu opterećenu na savijanje pomoću diferencijalne jednadžbe elastične linije (Slika 30).



**Slika 30. Određivanje unutarnjeg momenta na konzoli opterećenoj na savijanje**

Jednadžba diferencijalne elastične linije za slučaj na slici 30 prema literaturi [10] glasi:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y} . \quad (7)$$

Uvrštavanjem momenta  $M_y = -M$  dobiva se jednadžba (8):

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{-M}{EI_y} = \frac{M}{EI_y} . \quad (8)$$

Unutarnji moment savijanja za ovu konzolu negativnog je predznaka. Negativan predznak unutarnjeg momenta te minus u jednadžbi (8) dati će pozitivan predznak te će u nastavku minus iz jednadžbe (8) biti zanemaren. U sljedećem je koraku potrebno integrirati jednadžbu (8) i to dva puta da bi se dobio pomak.

Ako integriramo jednadžbu (8) dobijemo:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI_y} / \int . \quad (9)$$

Ako integriramo jednadžbu (9) dobijemo:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{M}{EI_y} \cdot x + K_1 / \int . \quad (10)$$

Nakon integracije jednadžbe (10) dobije se jednadžba (11) za progib konzole:

$$w = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{EI_y} \cdot x^2 + K_1 \cdot x + K_2 . \quad (11)$$

Nagib se dobiva na način da se prva derivacija pomaka pomnoži s minusom tj. jednadžba (11) se pomnoži s minusom i dobije se:

$$\alpha = -\frac{dw}{dx} = -\frac{M}{EI_y} \cdot x - K_1 . \quad (12)$$

U sljedećem je koraku potrebno izračunati konstante integriranja  $K_1$  i  $K_2$ . To je moguće na način da se primjene rubni uvjeti. Prvi rubni uvjet glasi: u točki „A“ konzole, tj. na mjestu uklještenja, pomak je nula tj. nema pomaka. Drugi uvjet nam govori o nagibu u istoj točki „A“ i on je također nula. Rubni se uvjeti mogu zapisati na sljedeći način.

- 1. rubni uvjet:  $x = 0 \rightarrow w = 0$ , (13)

- 2. rubni uvjet:  $x = 0 \rightarrow \alpha = 0$ . (14)

Ako jednadžbu (13) ubacimo u jednadžbu (11), dobivamo sljedeće:

$$w = 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{EI_y} \cdot 0^2 + K_1 \cdot 0 + K_2 . \quad (15)$$

Iz jednadžbe (15) dobije se da je integracijska konstanta  $K_2$  jednaka nuli.

Ako jednadžbu (14) ubacimo u jednadžbu (12) dobiva se sljedeća jednadžba.

$$\alpha = 0 = -\frac{M}{EI_y} \cdot 0 - K_1 . \quad (16)$$

Iz jednadžbe (16) dobiva se da je integracijska konstanta  $K_1$  također jednaka nuli. Konačna jednadžba za progib konzole glasi:

$$w = \frac{M}{EI_y} \cdot \frac{x^2}{2} . \quad (17)$$

Uvrštavanjem vrijednosti za  $x = 300$  mm, Youngov modul ( $E = 200\,000$  MPa) te za promjer konzole ( $d = 30$  mm), jednadžba (17) daje progib konzole na slobodnom kraju:

$$w = \frac{300000}{200000 \cdot \frac{\pi \cdot 30^4}{64}} \cdot \frac{300^2}{2} = 1,698 \text{ mm} . \quad (18)$$

Iz prethodnog proračuna dobili smo pomake i naprezanja za konzolu opterećenu na savijanje konstantnog poprečnog presjeka. Pri izračunu pomaka i naprezanja koristili su se izrazi iz literature [10] za čije su korištenje trebali biti zadovoljeni uvjeti „veličine“ ( $h/l$ ) konzole. U nastavku slijedi proračun iste konzole pomoću programskog paketa *Abaqus*.

## 6. PRORAČUN KONZOLE OPTEREĆENE NA SAVIJANJE KONSTANTNOG POPREČNOG PRESJEKA POMOĆU PROGRAMSKOG PAKETA ABAQUS

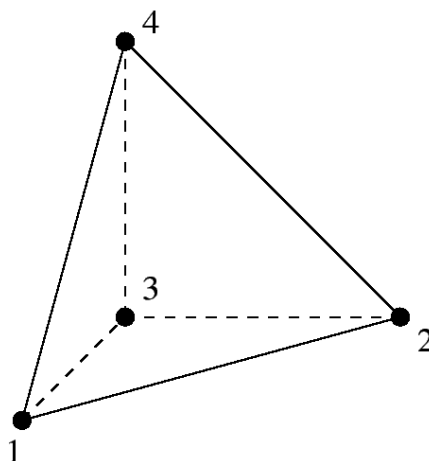
Proračun u programskom paketu *Abaqus* ima nekoliko koraka. Prvo je potrebno napraviti model na kojem će se raditi proračun. Model može biti dvodimenzionalan ili trodimenzionalan. U nekim slučajevima kada u stvarnosti imamo trodimenzionalnu komponentu koja se analizira, može se ta ista komponenta „zamijeniti“ dvodimenzionalnim modelom radi pojednostavljenja. Važno je napomenuti da je *Abaqus* vrlo moćan alat, ali vrlo je bitno poznavanje pozadine tj. teorije (metoda konačnih elemenata, nauka o čvrstoći, statika itd.) radi lakšeg rada. Jedna od bitnijih stavki kod programskog paketa *Abaqus* je vrijeme računanja koje se vrlo lako može itekako odužiti, ali s druge strane, dobrim modeliranjem početnog modela to se vrijeme može itakako smanjiti. Također je bitno napomenuti da je model u programskom paketu *Abaqus* uvijek malo krući od stvarnog modela; stvarnog stanja. Razlog tome su tzv. stupnjevi slobode. Za primjer uzmimo uklještenje. Ako u programskom paketu *Abaqus* nekoj komponenti dodijelimo uklještenje, taj dio komponente neće se moći gibati u niti jednom smjeru dok u stvarnosti znamo da vrlo malih pomaka ima, čak i kod uklještenja. Usprkos ovom pojednostavljenju, mogu se dobiti vrlo dobri i precizni rezultati. Druga bitna stavka kod modeliranja u programskom paketu *Abaqus* je odabir konačnih elemenata.

### 6.1. Konačni elementi

U numeričkoj analizi korišteni su konačni elementi iz programskog paketa *Abaqus*. Elementi koji su korišteni su tetraedarski konačni elementi; preciznije, tetraedarski konačni elementi višeg reda. Za provjeru rezultata provela se numerička analiza s prizmatičnim konačnim elementima (heksaedarski i pentaedarski konačni elementi).

#### 6.1.1. Tetraedarski konačni elementi

Uz prizmatične konačne elemente, veliku primjenu za trodimenzijsku analizu imaju i tetraedarski elementi. Osnovni tetraedarski element za trodimenzijsku analizu kontinuuma najjednostavniji je element s četiri čvora od kojih svaki ima 3 stupnja slobode što čini ukupno 12 stupnjeva slobode gibanja (Slika 31).



Slika 31. Osnovni tetraedarski element [11]

Za slučaj analize čvrstoće, svaki čvor ima tri stupnja slobode gibanja, a to su komponente pomaka u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Prema tome, vektor stupnjeva slobode glasi:

$$\mathbf{v}^T = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, \dots, u_4, v_4, w_4] . \quad (19)$$

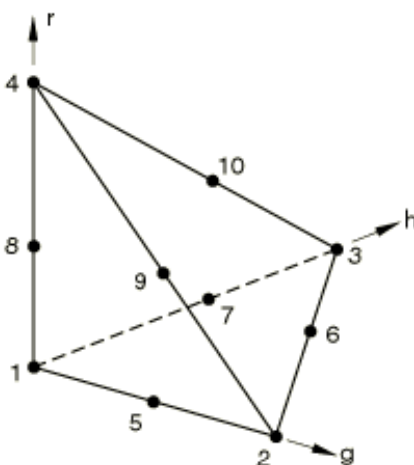
Raspodjela pomaka opisana je potpunim polinomima prvoga stupnja te takva raspodjela pomaka omogućuje zadovoljavanje svih potrebnih kriterija za monotonu konvergenciju rješenja, a to su prema literaturi [12]:

- interpolacijske funkcije mogu opisati pomake krutog tijela,
- zadovoljavanje svih potrebnih uvjeta kompatibilnosti duž rubova susjednih elemenata,
- mogućnost opisivanja polja konstantnih deformacija.

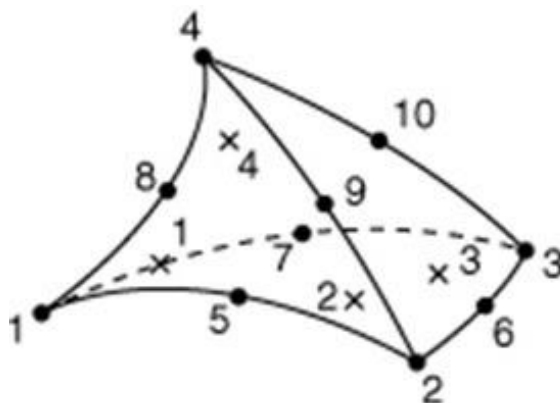
Dodavanjem čvorova osnovnom tetraedarskom elementu izvodi se tetraedarski element višeg reda pri čemu je poželjno da polinomi funkcija pomaka budu potpuni. Pomoću potpunog polinoma drugog stupnja opisano je polje pomaka tetraedarskog elementa drugog reda s 10 čvorova i 30 stupnjeva slobode gibanja (Slika 32). Takav se element u programskom paketu *Abaqus* naziva C3D10. Raspodjela pomaka kao i funkcije oblika mogu se pronaći u literaturi [12].

C3D10 tetraedarski je element višeg reda u programskom paketu *Abaqusu*, a za analizu ovog diplomskog rada koristio se element označen kao C3D10I (Slika 32) koji se naziva poboljšani tetraedarski element višeg reda (eng. *Improved tetrahedral element*). C3D10I se ponašaju uglavnom gotovo jednako kao i osnovni C3D10 elementi, međutim C3D10I je razvijen jer daje bolje rezultate kod savijanja kada imamo grube mreže te pritom izbjegava

zaključavanje pritiska u plastičnost metala te kvazi-nestlačivost i nestlačivost gume. Međutim C3D10 i C3D10I razlikuju se u integracijskim točkama (kojih C3D10I element ima 11) koje se kod C3D10I nalaze u čvorovima. Deset integracijskih točaka ovog elementa nalazi se u čvorovima elementa dok se jedanaesta integracijska točka nalazi u centroidu elementa (Slika 33). Upravo zbog toga što se kod takvog elementa integracijske točke nalaze u čvorovima on nije podložan ekstrapolacijskim greškama od integracijskih točaka do čvorova. Zbog tog razloga su C3D10I elementi poznati da imaju bolju vizualizaciju površinskog naprezanja (eng. *Improved surface stress visualization*). C3D10I tetraedarski elementi dobar su izbor za probleme zamora te u slučajevima kada je površinsko naprezanje od izuzetne važnosti. Važno je napomenuti da C3D10I elementi za probleme analize dodira nemaju nikakve prednosti pred C3D10 elementima. U praksi se ustanovilo da su poboljšani tetraedarski elementi brži tj. brže konvergiraju prema pravom rješenju od tetraedarskih elemenata višeg reda s 10 čvorova [13].



Slika 32. Tetraedarski element višeg reda [13]



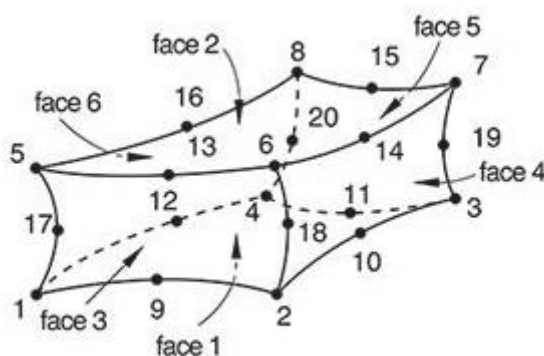
Slika 33. Integracijske točke C3D10I elementa [13]

### 6.1.2. Prizmatični konačni elementi

Prizmatični konačni elementi koji su se koristili u ovom radu su heksaedarski konačni elementi (Serendipity element drugog reda s 20 čvorova) te pentaedarski konačni elementi (Serendipity element drugog reda s 15 čvorova).

#### 6.1.2.1. Serendipity element drugog reda s 20 čvorova

Nakon tetraedarskih konačnih elemenata, najčešće korišteni elementi su heksaedarski konačni elementi. U našem slučaju koristi se prizmatični *serendipity* element drugog reda s 20 čvorova i reduciranom integracijom. Pomoću takvog elementa moguće je opisati polje pomaka polinomom četvrtog stupnja. Element ima 20 čvorova s ukupno 60 stupnjeva slobode gibanja (po tri stupnja slobode u svakom čvoru) te se takav element u programskom paketu *Abaqus* naziva C3D20R (Slika 34).

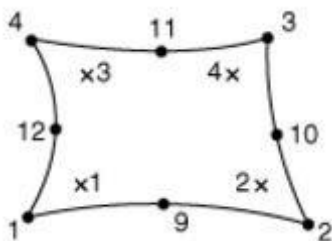


**Slika 34. Prizmatični serendipity element drugog reda s 20 čvorova (C3D20R) [13]**

C3D20R je element za općenitu upotrebu koji ima 8 integracijskih točaka (Slika 35). Raspodjela pomaka kao i funkcije oblika mogu se pronaći u literaturi [13] te [12]. C3D20R odlično se ponaša u općenitim uvjetima opterećenja. Također pokazuje dobre rezultate kod izohornog ponašanja materijala te kod savijanja jer se vrlo rijetko pojavljuje „*hourglassing*“ usprkos reduciranoj integraciji („*hourglassing*“ se javlja kada nema dovoljno integracijskih točaka za numeričku integraciju što rezultira velikim deformacijama, ali dobrim poljem naprezanja). Reducirana integracija koristi se integracijom nižeg reda da bi se dobila krutost elementa. Reduciranom integracijom smanjujemo (reduciramo) vrijeme analize, posebice kod trodimenzionalne analize. C3D20 element ima 27 integracijskih točaka dok C3D20R ima samo 8 integracijskih točaka i zbog toga je element C3D20R gotovo tri i pola puta financijski isplativiji. Teorija nam kaže da su loša strana reducirane integracije manje točni rezultati dobiveni numeričkom analizom dok nam praksa pokazuje da se elementima s reduciranom



integracijom dobivaju zadovoljavajući rezultati (koliko dobre rezultate ćemo dobiti ovisi pak o prirodi problema koji promatramo za slučaj kada koristimo elemente s reduciranom integracijom) [13].

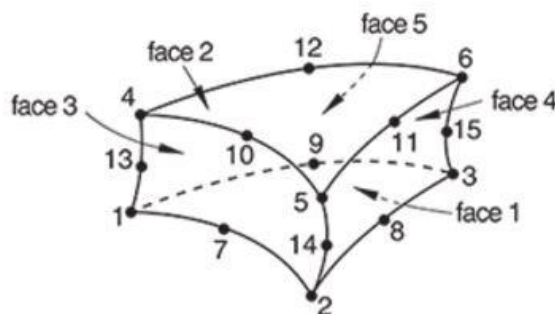


Slika 35. Integracijske točke C3D20R elementa [13]

Lošija strana C3D20R elemenata je kompliciranost korištenja kod složenih geometrija te problem kod proračuna gdje ima dodira/pritiska između dijelova. Problem kod dodirnih proračuna javlja se jer čvorne sile u vrhovima elementa koje su jednake konstantnom tlaku na stranicama elementa iznose nula ili imaju suprotan smjer od čvornih sila na sredini stranice elementa [13].

#### 6.1.2.2. Serendipity element drugog reda s 15 čvorova

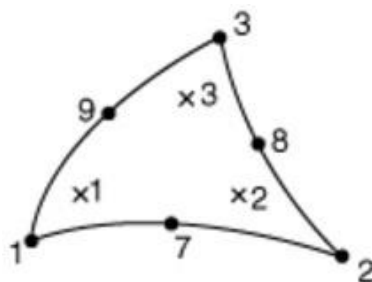
Serendipity element s 15 čvorova po svojstvima je sličan serendipity elementu s 20 čvorova te se u programskom paketu *Abaqus* naziva C3D15 element. Element ima 15 čvorova i 45 stupnjeva slobode gibanja (po tri stupnja slobode gibanja po jednom čvoru) (Slika 36).



Slika 36. Serendipity element drugog reda s 15 čvorova (C3D15) [13]

Element je to koji je dobar za općenitu primjenu te ima 9 integracijskih točaka (Slika 37). Raspodjela pomaka kao i funkcije oblika mogu se pronaći u literaturi [13] te [12]. Kao što je spomenuto, element se dobro ponaša u općenitim uvjetima, ali C3D20R element svejedno daje bolje rezultate za isti broj stupnjeva slobode gibanja. C3D15 koristi se u kombinaciji s C3D20R

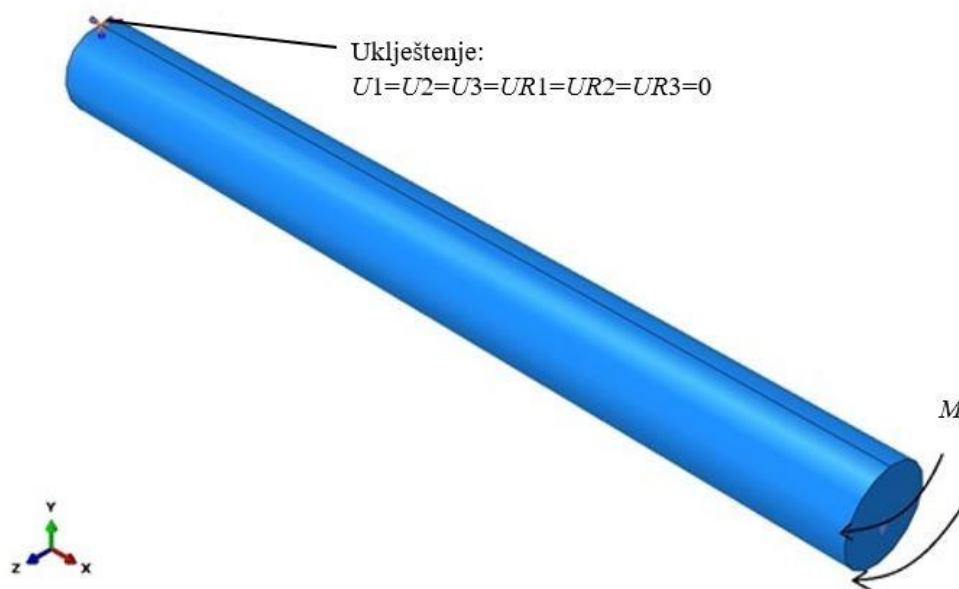
elementima na način da mreža konačnih elemenata dobro izgleda ili kod automatskog „meširanja“ pomoću heksaedarskih elemenata [13].



Slika 37. Integracijske točke C3D15 elementa [13]

## 6.2. Proračun i rezultati u programskom paketu Abaqus s tetraedarskom mrežom

Proračun konzole (Slika 28) opterećene savojno započinje modeliranjem same konzole; određivanjem veličine i oblika poprečnog presjeka te njezine duljine. U nastavku se dodjeljuju stupnjevi slobode tj. definira se uklještenje konzole kao i određivanje mjesta, vrste, veličine i smjera opterećenja (Slika 38). U ovom slučaju, za opterećenje je odabran moment savijanja oko y-osi. Moment oko y-osi stavio se s namjerom da savijanje bude oko iste osi kao i kod računanja analitičkim putem.

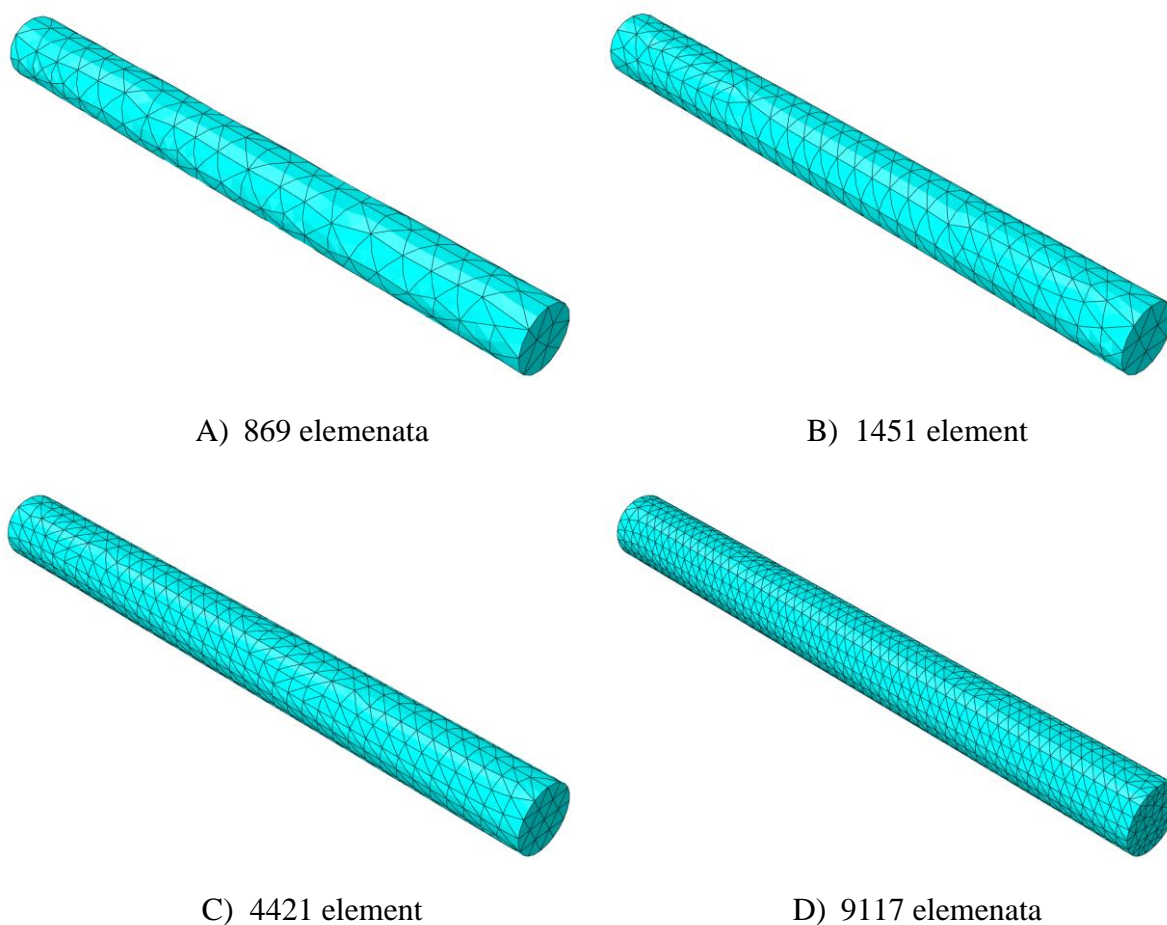


Slika 38. Model konzole opterećene na savijanje u programskom paketu Abaqus

Sljedeći je korak bio na modelu konzole odrediti optimalnu mrežu konačnih elemenata C3D10I. To znači da je trebalo odrediti optimalan broj elemenata koji se postavlja na konzolu da se dobiju dovoljno dobri rezultati. Dobri rezultati znače da se nalaze unutar 5% greške u odnosu na analitički proračun te iste konzole. Ako se zadovoljavajući rezultati dobivaju već s

malim brojem konačnih elemenata, nije potrebno povećavati broj elemenata i na taj način produžiti vrijeme računanja u programskom paketu *Abaqus*.

Ako u izborniku u programskom paketu *Abaqus* odaberemo globalnu veličinu elemenata od 15 mm dobivamo mrežu od 869 konačnih (C3D10I) elemenata. Ako je globalna veličina elemenata 10 mm dobivamo mrežu od 1451 elementa. Ako je globalna veličina elemenata 8 mm dobivamo mrežu od 4421 elementa te ako je globalna veličina elemenata 5 mm dobivamo mrežu od 9117 konačnih elemenata (Slika 39).



**Slika 39. Različite mreže konačnih elemenata konzole opterećene na savijanje s konstantnim poprečnim presjekom i tetraedarskim elementima**

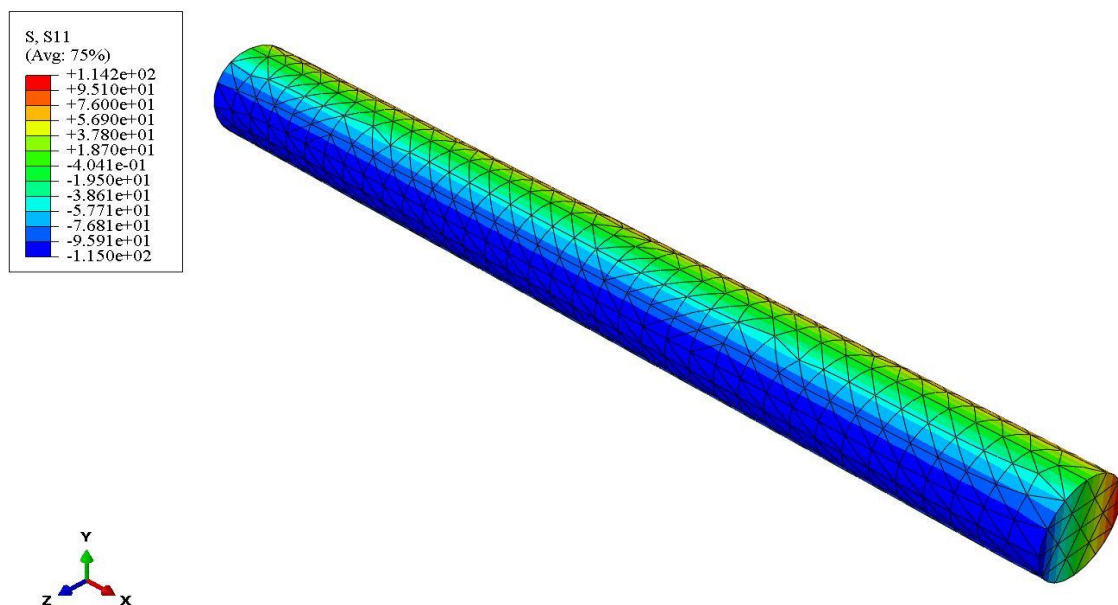
Tablica 2 prikazuje rezultate naprezanja tj. savijanja i pomaka za konzolu opterećenu na savijanje (Slika 38). Vidimo da već s prvom mrežom od 869 elemenata, kada je globalna veličina elemenata 15 mm, dobivamo dovoljno dobre rezultate. Međutim, kao referentna mreža za koju će dalje biti prikazani rezultati naprezanja i pomaka odabrana je treća mreža od 4421 elementa kada je globalna veličina elemenata 8 mm. Ta je mreža odabrana jer daje vrlo točne rezultate u usporedbi s analitičkim rješenjem te numerička analiza s 4421 elementom traje duplo

kraće nego numerička analiza kada je veličina elemenata 5 mm tj. mrežom od 9117 elemenata. U slučaju s odabranom mrežom dobiva se naprezanje od 114,2 MPa i pomak od 1,698 mm.

Slika 40 prikazuje model iz programskog paketa *Abaqus* koji prikazuje raspored naprezanja; točnije naprezanja savijanja oko osi-y. Na slici se vidi da je konzola opterećena momentom savijanja i to tako da je dio konzole koji je označen crvenom bojom opterećen vlačno, a dio konzole koji je označen plavo opterećen je tlačno. Vlačno naprezanje iznosi 114,2 MPa. Vlačno naprezanje uvijek je pozitivnog predznaka dok je tlačno naprezanje negativnom predznaka što se vidi na legendi (Slika 40).

**Tablica 2. Rezultati naprezanja i pomaka za mreže s različitim brojem tetraedarskih konačnih elemenata**

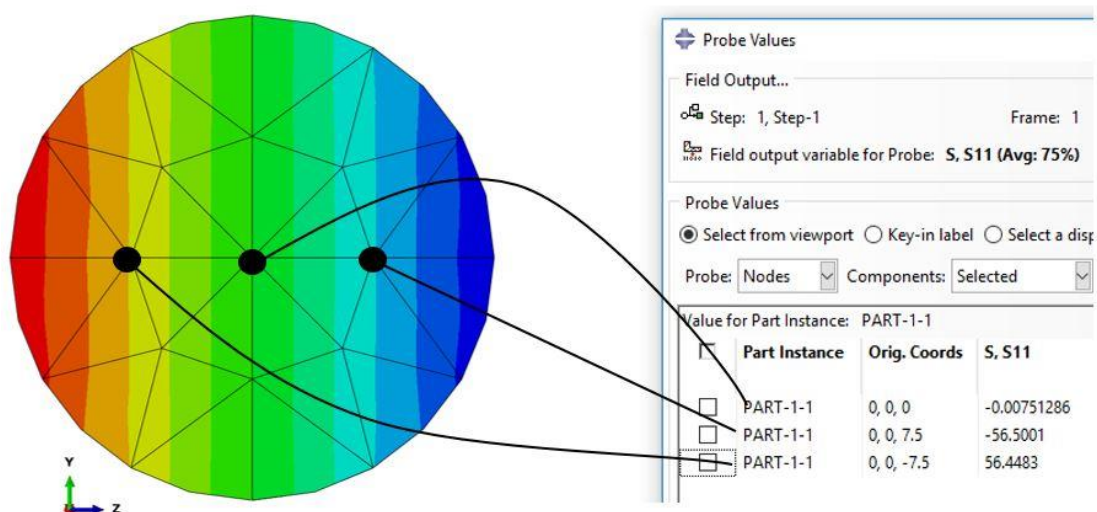
Broj elemenata	Naprezanje (MPa)	Pomak (mm)
869	119,1	1,692
1451	115,1	1,698
4421	114,2	1,698
9117	114,1	1,698



**Slika 40. Raspodjela naprezanja u MPa konzole s konstantnim poprečnim presjekom i tetraedarskim elementima**

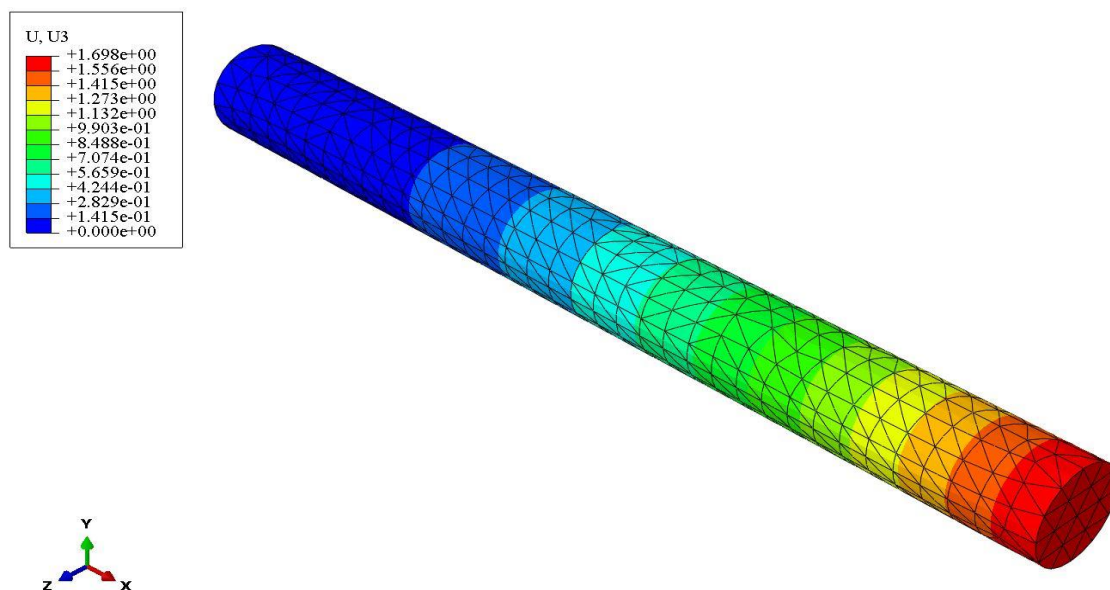
Raspodjela naprezanja po presjeku u programskom paketu *Abaqus* malo se razlikuje u odnosu na raspodjelu naprezanja po presjeku dobivenu analitičkim putem. U samom središtu

presjeka ( $z = 0$  mm) naprezanje iznosi  $-0,0075$  MPa što je vrlo malo, ali nije točno  $0$  MPa kao analitičkim putem. Ista je situacija i s naprezanjem na polovini presjeka ( $z = 7,5$  mm). Vlačno naprezanje iznosi  $+56,45$  MPa, a tlačno naprezanje iznosi  $-56,5$  MPa (Slika 41), dok naprezanje na polovici presjeka dobiveno analitičkim putem i u vlaku i u tlaku iznosi  $56,59$  MPa.



Slika 41. Raspodjela naprezanja po presjeku u programskom paketu Abaqus

Pomak konzole s konstantnim poprečnim presjekom iznosi  $1,698$  mm. Crvena boja označava maksimalan progib te on iznosi  $1,698$  mm, a plava boja označava progib od  $0$  mm, tj. uklještenje za koje smo prije definirali da nema pomaka u niti jednom smjeru osi koordinatnog sustava (Slika 42).



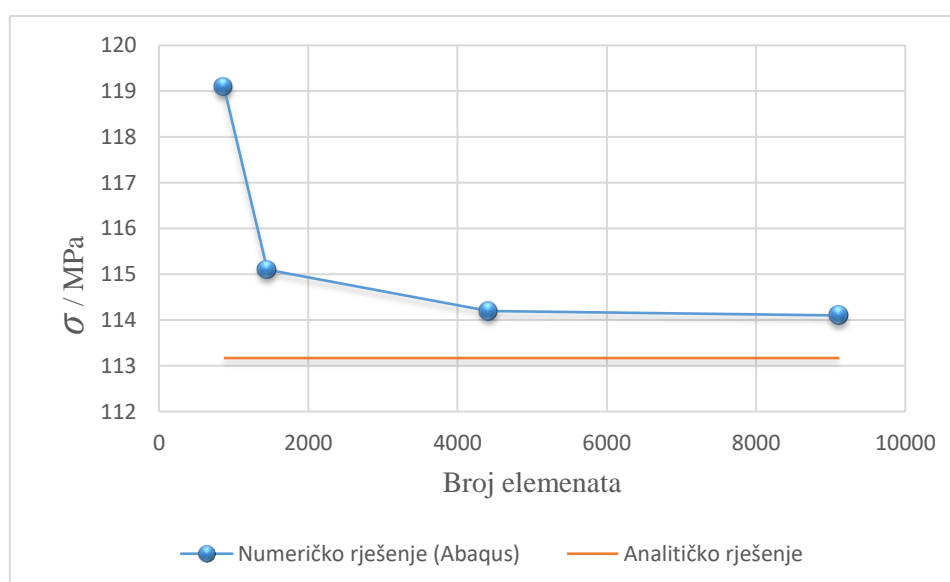
Slika 42. Progib konzole u mm s konstantnim poprečnim presjekom i tetraedarskim elementima

Tablica 3 prikazuje usporedbu rezultata za konzolu dobivenih analitičkim i numeričkim putem. Uobičajena inženjerska dopuštena greška iznosi 5%. Kod naprezanja, razlika između analitičkog i numeričkog proračuna u programskom paketu *Abaqus* iznosi 0,91% što je dovoljno malo i zadovoljava dopuštenu inženjersku grešku do 5%. Pomak je jednak na treću decimalu i kod analitičkog i kod numeričkog računanja.

**Tablica 3. Usporedba analitičkog i numeričkog proračuna konzole s konstantnim poprečnim presjekom i tetraedarskim elementima**

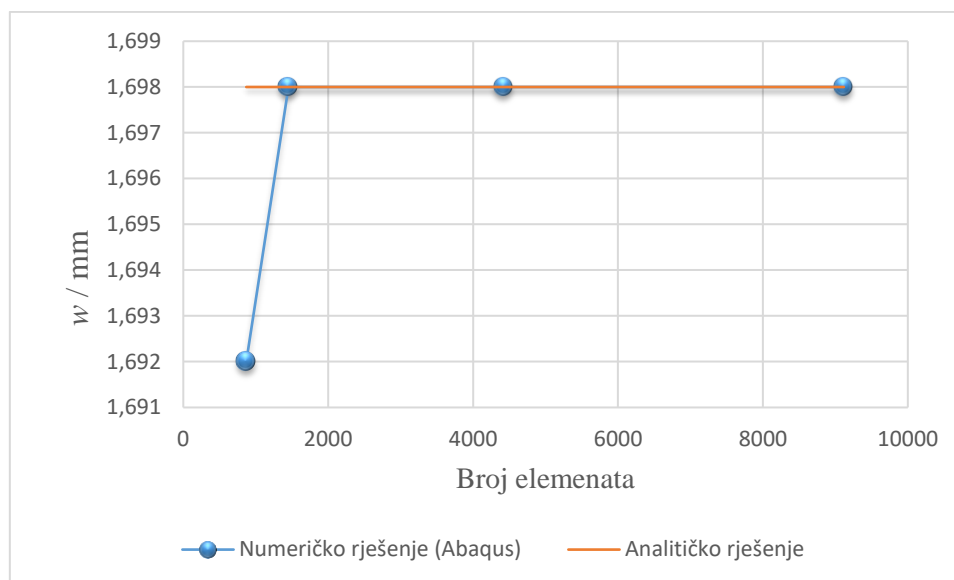
	Analitički	Numerički	$E_{REL} / \%$
Naprezanje / MPa	113,17	114,2	0,91
Progib / mm	1,698	1,698	0,0

Još jedan razlog zašto je vrlo važno tokom proračuna u programskom paketu *Abaqus* isprobati više različitih mreža tj. mreže s različitim brojem elemenata je konvergencija rješenja. U našem primjeru konvergencija se postiže gotovo odmah i nije potrebno isprobavati više od 3 - 4 mreže da bi došli do zadovoljavajućih rezultata. Kod savijanja se vidi da pomoću metode konačnih elemenata i programskog paketa *Abaqus* ne dobivamo potpuno isto rješenje kao analitičkim putem, ali se dobivaju rezultati koji su zadovoljavajući tj. greška ne prelazi 5% dopuštene inženjerke greške (Slika 43). Kod pomaka vidimo da već s drugom mrežom od 1451 elementom dobivamo potpuno iste rezultate kao i analitičkim putem (Slika 44).



**Slika 43. Dijagram konvergencije naprezanja za konzolu s konstantnim poprečnim presjekom i tetraedarskim elementima**





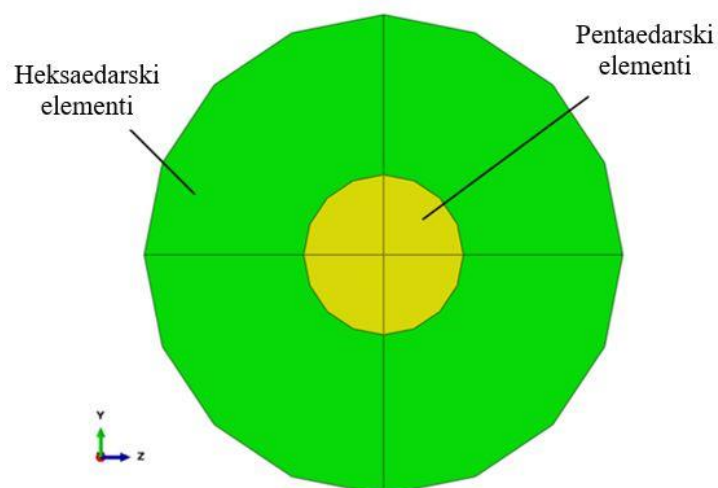
**Slika 44. Dijagram konvergencije progiba za konzolu s konstantnim poprečnim presjekom i tetraedarskim elementima**

### 6.3. Proračun i rezultati u programskom paketu Abaqus s prizmatičnom mrežom konačnih elemenata

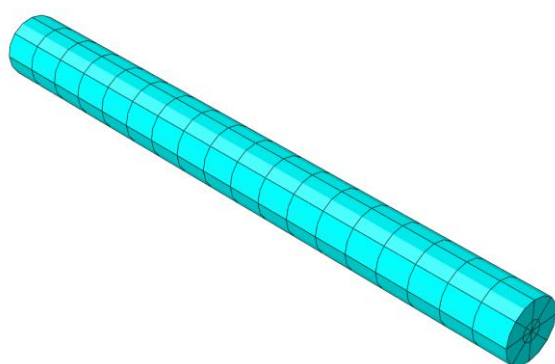
Razlog korištenja heksaedarskih elemenata je provjera rezultata dobivenih pomoću tetraedarskih elemenata. Poznato je da su heksaedarski elementi u teoriji bolji od tetraedarskih konačnih elemenata. Razlog tome je što tetraedarski elementi prvog reda mogu opisati konstantno polje opterećenja, dok heksaedarski elementi prvog reda mogu opisati linearno polje opterećenja. Pentaedarski konačni elementi koriste se za lakše opisivanje geometrije oko same središnjice konzole opterećene na savijanje.

Princip modeliranja u programskom paketu *Abaqus* je potpuno isti kao i kod primjera s tetraedarskim elementima (Slika 38) te se zbog toga ovdje to neće prikazati. Kod kreiranja mreže odabrani su heksaedarski elementi. Kod odabira oblika heksaedarskih elemenata s opcijom „Assign Mesh Control“ odabrani su „wedge“ ili pentaedarski (klinasti) elementi u sredini konzole koja je označena žutom bojom dok su okolni elementi heksaedarskog oblika označeni zelenom bojom (Slika 45).

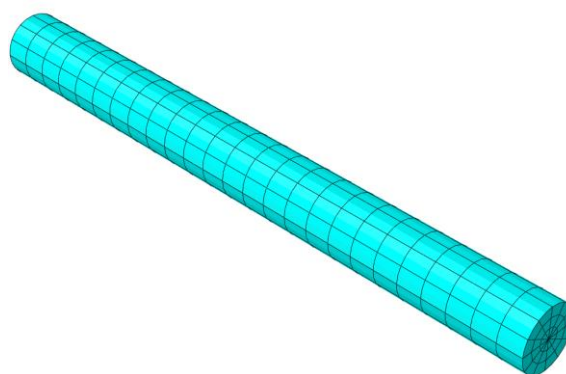
Različitom odabirom veličine i broja elemenata dobivaju se mreže konačnih elemenata. Generirale su se četiri različite mreže; mreža od samo 204 elementa koja je ujedno i najrjeđa, mreža od 1080 elemenata, mreža od 2752 elementa te mreža od 7200 elemenata koja je ujedno i najgušća (Slika 46). Odmah je vidljivo da najgušća mreža s heksaedarskim elementima ima 7200 elementa dok najgušća mreža s tetraedarskim elementima ima 9117 elementa (Slika 39); za obje mreže odabrana je veličina konačnih elemenata od 5 mm.



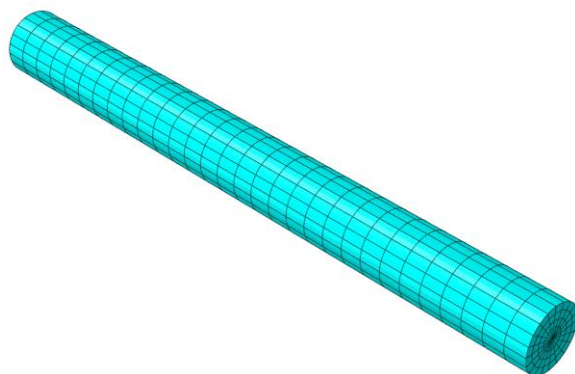
Slika 45. Pentaedarski (*wedge*) i heksaedarski oblik konačnih elemenata



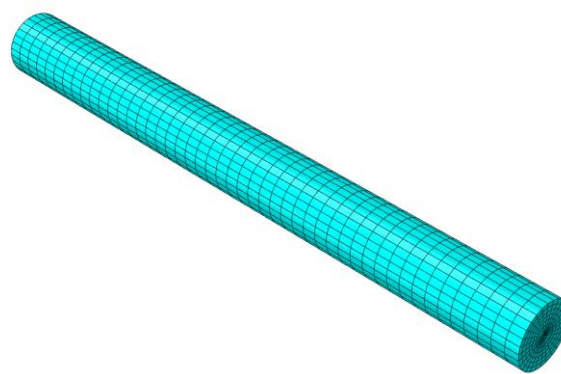
A) 204 elementa



B) 1080 elemenata



C) 2752 elemenata



D) 7200 elemenata

Slika 46. Različite mreže konačnih elemenata konzole opterećene na savijanje s konstantnim poprečnim presjekom i prizmatičnim konačnim elementima

Tablica 4 prikazuje rezultate naprezanja tj. savijanja i pomaka za konzolu opterećenu na savijanje. Vidimo da već s prvom mrežom od 240 elemenata kada je globalna veličina elemenata 15 mm dobivamo dovoljno dobre rezultate. Međutim, kao referentna mreža za koju

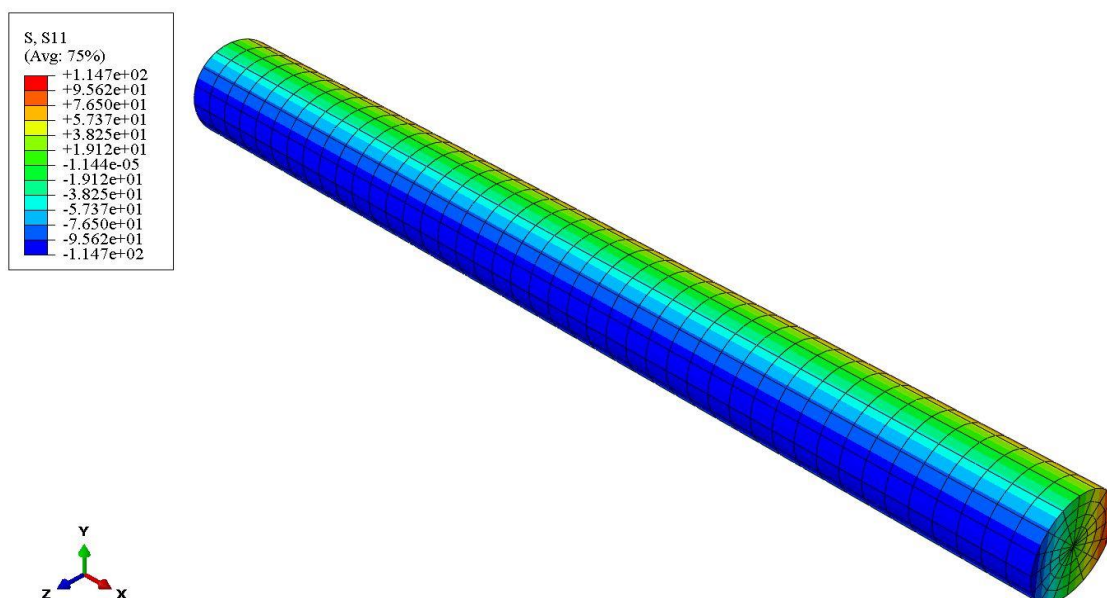


će biti dalje prikazani rezultati naprezanja i pomaka odabrana je mreža od 2752 elemenata kada je globalna veličina elemenata 8 mm kao i za slučaj proračuna konzole s tetraedarskim elementima. U tom slučaju dobiva se naprezanje od 114,7 MPa i pomak od 1,698 mm.

**Tablica 4. Rezultati naprezanja i pomaka za mreže s različitim brojem heksaedarskih i pentaedarskih konačnih elemenata**

Broj elemenata	Naprezanje (MPa)	Pomak (mm)
240	119,3	1,701
1080	115,9	1,698
2752	114,7	1,698
7200	113,9	1,698

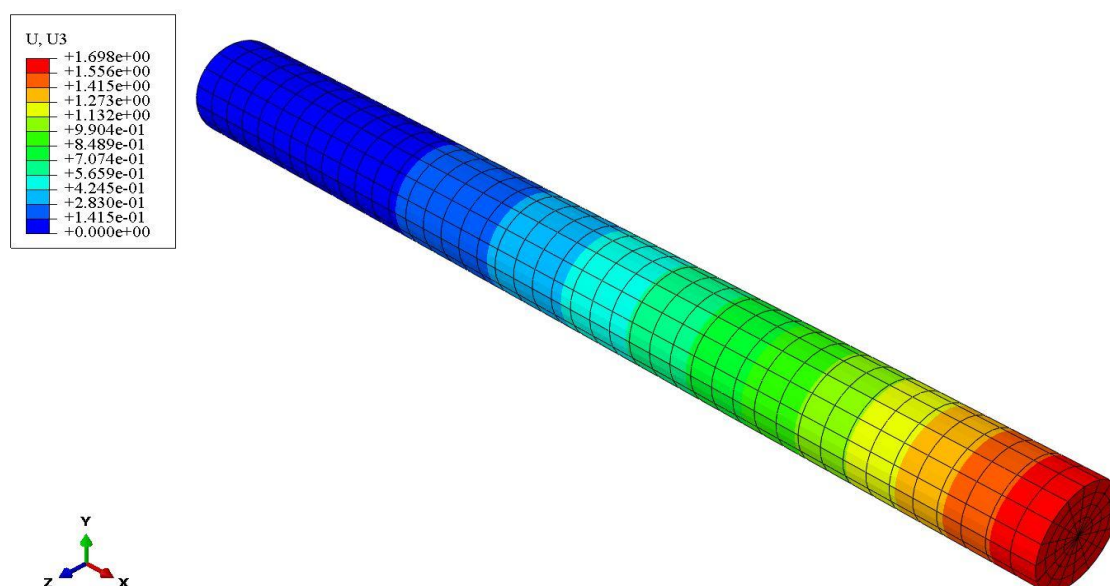
Slika 47 prikazuje model iz programskog paketa *Abaqus* koji prikazuje raspored naprezanja; točnije naprezanja savijanja oko osi-y. Na slici se vidi da je konzola opterećena na savijanje i to tako da je dio konzole koji je označen crvenom bojom opterećen vlačno, a dio konzole koji je označen plavo opterećen je tlačno. Vlačno i tlačno naprezanje iznosi 114,7 MPa. Vlačno naprezanje uvijek je pozitivnog predznaka dok je tlačno naprezanje negativnom predznaka što se vidi na legendi (Slika 47).



**Slika 47. Raspodjela naprezanja u MPa konzole s konstantnim poprečnim presjekom i prizmatičnim konačnim elementima**

Pomak (progib) konzole s konstantnim poprečnim presjekom iznosi 1,698 mm. Crvena boja označava maksimalan progib i on iznosi 1,698 mm, a plava boja označava progib od 0

mm, tj. uklještenje za koje smo prije definirali da nema pomaka u niti jednom smjeru osi koordinatnog sustava (Slika 48).



**Slika 48. Progib konzole u mm s konstantnim poprečnim presjekom i prizmatičnim konačnim elementima**

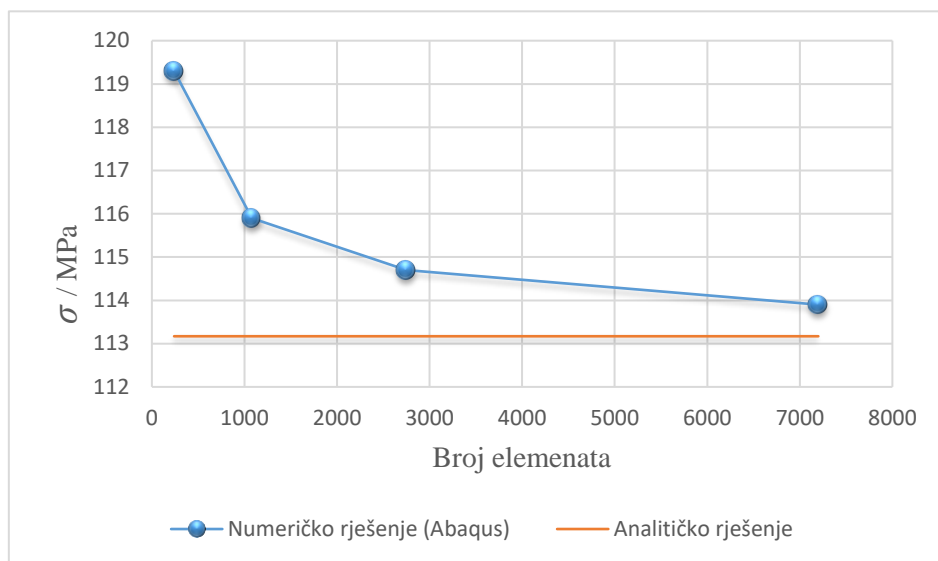
Tablica 5 prikazuje usporedbu rezultata za konzolu dobivenih analitičkim i numeričkim putem. Uobičajena inženjerski dopuštena greška kao što je prije spomenuto iznosi 5%. Kod savijanja je razlika između analitičkog i numeričkog proračuna u programskom paketu *Abaqus* 0,64% što je dovoljno malo i zadovoljava dopuštenu inženjersku grešku do 5%. Pomak je jednak na treću decimalu i kod analitičkog i kod numeričkog računanja i iznosi 1,698 mm.

**Tablica 5. Usporedba analitičkog i numeričkog proračuna konzole s konstantnim poprečnim presjekom s heksaedarskim i pentaedarskim elementima**

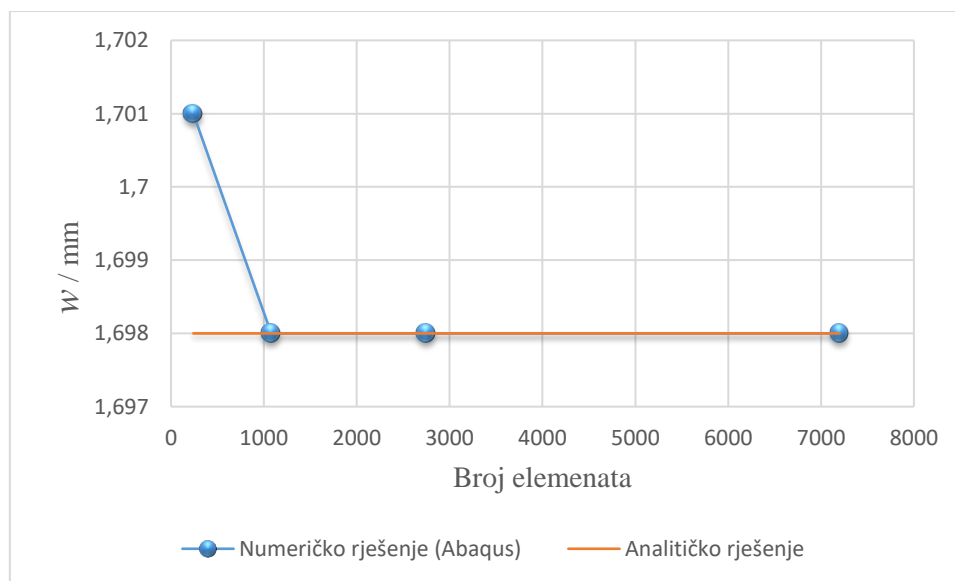
	Analitički	Numerički	$E_{REL} / \%$
Naprezanje / MPa	113,17	113,9	0,64
Progib / mm	1,698	1,698	0,0

Za primjer s heksaedarskim i pentaedarskim konačnim elementima konvergencija se postiže gotovo odmah i nije potrebno isprobavati više od dvije mreže da bi došli do zadovoljavajućih rezultata. Kod savijanja se vidi da se pomoću MKE-a i programskog paketa *Abaqus* ne dobivaju potpuno ista rješenja kao analitičkim putem, ali se dobivaju rezultati koji su zadovoljavajući tj. greška ne prelazi 5% dopuštene inženjerke greške (Slika 49). Kod pomaka

vidimo da već s drugom mrežom od 1080 elemenata dobivamo potpuno iste rezultate kao i analitičkim putem (Slika 50).



**Slika 49. Dijagram konvergencije naprezanja za konzolu s konstantnim poprečnim presjekom i prizmatičnim konačnim elementima**



**Slika 50. Dijagram konvergencije progiba za konzolu s konstantnim poprečnim presjekom i prizmatičnim konačnim elementima**

Usporedbom rezultata koje smo dobili pomoću različitih konačnih elemenata (heksaedarskih/pentaedarskih i tetraedarskih) možemo odrediti koje ćemo elemente koristiti u daljnjem proračunu konzole s promjenjivim poprečnim presjekom. Vidimo da se rezultati naprezanja između tetraedarske i prizmatične mreže konačnih elemenata razlikuju za 0,44% što je zanemarivo malo (rezultati pomaka su jednaki u oba slučaja) (Tablica 6). Uočeno je iz rezultata dobivenih pomoću različitih konačnih elemenata da se brža konvergencija postiže s

heksaedarskim, odnosno pentaedarskim elementima tj. za manji broj elemenata dobiva se točnije rješenje nego s tetraedarskim elementima. Jasno je da se vrijeme numeričke analize povećava kako raste broj elemenata, međutim za ovaj slučaj kada je geometrija konstrukcije jednostavna i kada ni jedna numerička analiza ne traje više od tridesetak sekundi, vrijeme analize ne igra veliku ulogu. Ono što nam je važno iz ovih podataka je da se pomoću tetraedarskih elemenata postižu vrlo dobri rezultati, a velika prednost tetraedarskih konačnih elemenata je jednostavnost generiranja mreže konačnih elemenata. Puno je jednostavnije napraviti mrežu pomoću tetraedarskih elemenata nego pomoću heksaedarskih elemenata i to je razlog zbog kojeg će se u daljnjem proračunu konzole s promjenjivim poprečnim presjekom koristiti samo tetraedarski konačni elementi.

**Tablica 6. Usporedba rezultata dobivenih pomoću tetraedarskih i prizmatičnih (heksaedarskih i pentaedarskih) elemenata**

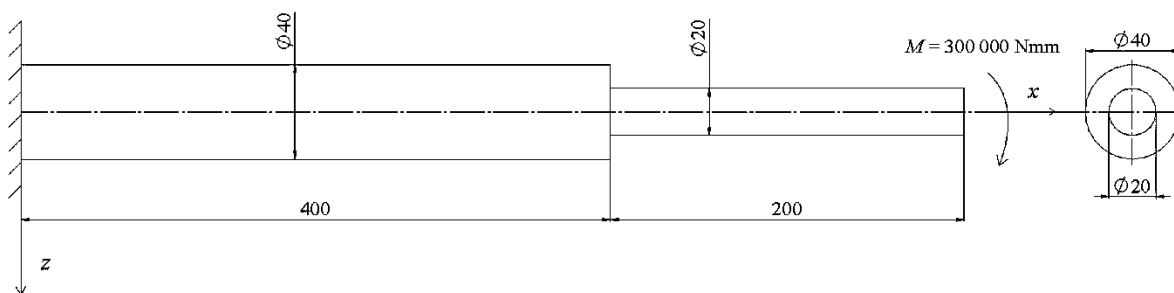
	Tetraedarski elementi	Prizmatični elementi	$E_{REL}$ / %
Naprezanje / MPa	114,2	114,7	0,44
Pomak / mm	1,698	1,698	0,0

## 7. PRORAČUN SAVOJNO OPTEREĆENE KONZOLE PROMJENJIVOG POPREČNOG PRESJEKA

U ovom će poglavlju biti detaljno prikazan proračun konzole s promjenjivim poprečnim presjekom kao i računanje i usporedba faktora koncentracije naprezanja što je zapravo i tema ovog diplomskog rada. Na primjeru konzole opterećene na savijanje koja ima promjenjivi poprečni presjek (Slika 51) proračunati će se naprezanja za tri slučaja:

- I. prvi slučaj je konzola kod koje je prijelaz s većeg na manji promjer izveden „običnim“ kružnim zaobljenjem tj. četvrtinom kružnice,
- II. drugi slučaj je konzola kod koje je prijelaz s većeg na manji promjer izveden pomoću eliptičnog zaobljenja,
- III. treći slučaj je konzola kod koje je prijelaz s većeg na manji promjer izveden pomoću metode vlačnih trokuta.

Za sva tri slučaja koristiti će se programski paket *Abaqus* koji se koristio i za konzolu konstantnog poprečnog presjeka (Slika 28). Razlog zašto će se prvo proračunavati konzola kod koje je prijelaz s većeg na manji promjer izveden kao kružno zaobljenje je mogućnost analitičkog računanja faktora koncentracije naprezanja za takav slučaj. Pomoću literature [14] i danih formula moguće je izračunati faktor koncentracije naprezanja za slučaj savijanja konzole te rezultate usporediti s onima dobivenima u programskom paketu *Abaqus*.



Slika 51. Konzola opterećena na savijanje s promjenjivim poprečnim presjekom

### 7.1. Faktor koncentracije naprezanja

Slika Slika 52 prikazuje veliku ploču koja u sredini ima kružni provrt. Za primjenjeno jednoosno vlačno opterećenje, polje naprezanja može se izračunati prema teoriji elastičnosti, a u polarnim koordinatama cirkularna komponenta naprezanja u točki“ *P*“ dana je prema jednadžbi (20) [14]:

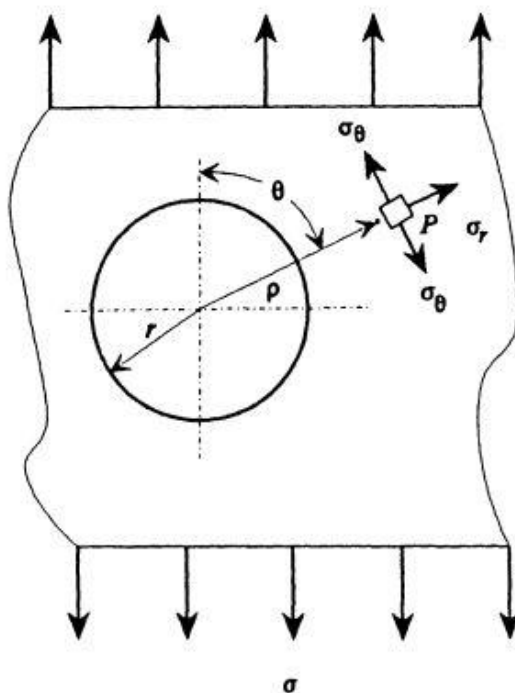
$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( r^2 / \rho^2 \right) \right] - \frac{1}{2} \sigma \left[ 1 + 3 \left( r^4 / \rho^4 \right) \right] \cos 2\theta . \quad (20)$$

Maksimalna se naprezanja javljaju na dijelovima provrta gdje je  $\rho = r$  i  $\theta = 0,5\pi$  ili  $\theta = 1,5\pi$ :

$$\sigma_{\theta} = 3\sigma . \quad (21)$$

Vršno naprezanje tri je puta veće od nominalnog naprezanja  $\sigma$ . Faktor koncentracije naprezanja definira se kao omjer izračunatog vršnog naprezanja i nominalnog naprezanja koje postoji u slučaju da distribucija naprezanja ostane ujednačena i računa se prema jednadžbi (22) [14]:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} . \quad (22)$$



Slika 52. Ploča s provrtom [14]

Nominalno naprezanje računa se prema formulama iz nauke o čvrstoći [10]. Za slučaj na slici 52 faktor koncentracije naprezanja iznosi:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} = 3 . \quad (23)$$

Efekt koji izazivaju koncentratori naprezanja (eng. *Stress raiser*) je da promjene raspodjelu naprezanja. Ravnoteža zahtjeva da prosječno stanje naprezanja u presjeku bude

jednoliko u slučaju koncentracije naprezanja kao što bi to bilo u slučaju jednolike raspodjele naprezanja tj. bez koncentracije naprezanja. Koncentracija naprezanja rezultira ne samo u neuobičajeno visokim naprezanjima u blizini koncentratora naprezanja već i neuobičajeno niskim naprezanjima u ostatku presjeka [14].

Kada na dio koji ima zareze i ureze djeluje više opterećenja od jednom (vlak + torzija i savijanje) nominalno se naprezanje multiplicira faktorom koncentracije naprezanja za svako opterećenje, a rezultatno se naprezanja dobiva superpozicijom. Međutim, kada savijanje i aksijalna sila djeluju simultano, superpozicija se može upotrijebiti samo kada je moment savijanja zbog aksijalne sile i pomaka zanemariv naspram momenata savijanja zbog primjenjenih opterećenja [14].

### **7.1.1. Efektivni faktor koncentracije naprezanja**

U teoriji, vršna naprezanja u blizini koncentratora naprezanja bila bi  $K_t$  puta veća od nominalnog naprezanja na mjestu dovoljno udaljenom od mjesta koncentracije naprezanja. Međutim  $K_t$  je idealizirana vrijednost temeljena na linearno elastičnom ponašanju materijala i ovisi samo o proporcijama dimenzija bitnih za izračun faktora koncentracije naprezanja. U praksi, međutim, mnogo raznih fenomena može djelovati i smanjiti efekte koncentracije naprezanja. Plastična lokalna deformacija, zaostalo naprezanje, radijus pukotine, veličina predmeta, temperatura, karakteristike materijala (npr. veličina zrna), vrsta opterećenja (statičko, cikličko ili udarno); sve ovo može utjecati na način na koji se vršno naprezanje bliži teoretskoj vrijednosti  $K_t\sigma_{nom}$  [14].

Da bi se mogli nositi s raznim fenomenima koji utječu na koncentraciju naprezanja uvodi se koncept efektivnog faktora koncentracije naprezanja. Efektivni faktor koncentracije naprezanja dobiva se eksperimentalnim putem [14].

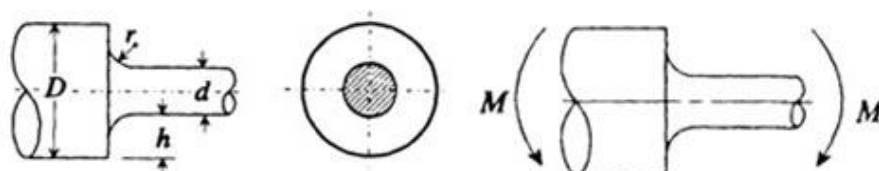
Efektivni faktor koncentracije naprezanja definiran je kao omjer između naprezanja izračunatog za opterećenje kod kojeg se inicira strukturno oštećenje u epruveti koja je slobodna od koncentratora naprezanja i nominalnog naprezanja koje se odnosi na opterećenje kod kojeg započinje oštećenje u epruveti s koncentratorima naprezanja. Pretpostavlja se da oštećenje u stvarnoj strukturi započinje kada maksimalno naprezanje postiže istu vrijednost u oba slučaja [14].

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} . \quad (24)$$

Faktor  $K_{\sigma}$  je u ovom slučaju efektivni faktor koncentracije naprezanja određen eksperimentalnim ispitivanjem određenog uzorka/epruvete. U daljnjem proračunu koristit će se teoretski faktor koncentracije naprezanja zbog neprikladnosti eksperimentalnog dobivanja efektivnog faktora koncentracije naprezanja.

### 7.1.2. Izračun faktora koncentracije naprezanja

Analitički proračun faktora koncentracije naprezanja prema literaturi [14] prikazan je na primjeru (Slika 53). Analitički proračun naprezanja na mjestu prijelaza za slučaj konzole s promjenjivim poprečnim presjekom ne postoji, a posljedično tome ne može se na takav način dobiti faktor koncentracije naprezanja. U svrhu dobivanja faktora koncentracije naprezanja koristiti ćemo se analitičko-empirijskim formulama prema literaturi [14]. Ovaj nam način omogućava dobivanje faktora koncentracije naprezanja koji ćemo kasnije moći usporediti s numerički dobivenim faktorom koncentracije naprezanja u programskom paketu *Abaqus* te ćemo na takav način znati ako i koliko dobre rezultate dobivamo numeričkom analizom u programskom paketu *Abaqus*.



**Slika 53. Primjer vratila opterećenog na savijanje za koji će se računati faktor koncentracije naprezanja [14]**

Računanje faktora koncentracije naprezanja za slučaj kao na gornjoj slici moguće je za različite dimenzije: za slučaj kada je omjer  $0,1 \leq h/R \leq 2,0$  te za slučaj kada je omjer  $2,0 \leq h/R \leq 20,0$  (oznaka zaobljenja je s tiskanim slovom  $R$  zbog već postojeće oznake „ $r$ “). U slučaju naših proizvoljno odabranih dimenzija (Slika 51), za  $R = 2 \text{ mm}$  i  $h = 10 \text{ mm}$  dobiva se omjer  $h/R = 5$  te se faktor koncentracije naprezanja računa prema formulama koje će biti prikazane u nastavku.

Faktor koncentracije naprezanja dobiva se preko maksimalnog i nominalnog naprezanja prema jednadžbi (25) koja je preuzeta iz literature [14].



$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}} . \quad (25)$$

Nominalno naprezanje računa se prema jednadžbi (26).

$$\sigma_{\text{nom}} = 32M / \pi d^3 . \quad (26)$$

Faktor zareznog djelovanja za omjer  $2,0 \leq h/r \leq 20,0$  računa se prema jednadžbi (27).

$$K_t = C_1 + C_2 \frac{2h}{D} + C_3 \left( \frac{2h}{D} \right)^2 + C_4 \left( \frac{2h}{D} \right)^4 . \quad (27)$$

Računanje faktora  $C_1$  prema jednadžbi (28):

$$C_1 = 1,232 + 0,832\sqrt{h/r} - 0,008 \frac{h}{r} . \quad (28)$$

Uvrštavanjem brojeva za  $h = 10$  mm i  $r = 2$  mm dobivaju se faktori  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  te  $C_4$ :

$$C_1 = 1,232 + 0,832\sqrt{10/2} - 0,008 \frac{10}{2} = 3,05 . \quad (29)$$

$$C_2 = -3,813 + 0,968\sqrt{h/r} - 0,260 \frac{h}{r} . \quad (30)$$

$$C_2 = -3,813 + 0,968\sqrt{10/2} - 0,260 \frac{10}{2} = -2,948 . \quad (31)$$

$$C_3 = 7,423 - 4,868\sqrt{h/r} + 0,869 \frac{h}{r} . \quad (32)$$

$$C_3 = 7,423 - 4,868\sqrt{10/2} + 0,869 \frac{10}{2} = 0,883 . \quad (33)$$

$$C_4 = -3,839 + 3,070\sqrt{h/r} - 0,600 \frac{h}{r} . \quad (34)$$

$$C_4 = -3,839 + 3,070\sqrt{10/2} - 0,600 \frac{10}{2} = 0,0257 . \quad (35)$$

Uvrštavanjem faktora  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  te  $C_4$  u jednadžbu (27) dobiva se:

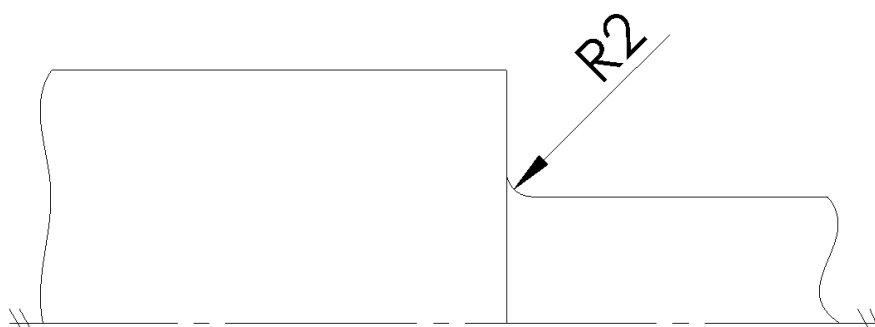
$$K_t = 3,05 + (-2,948) \frac{2 \cdot 10}{40} + 0,883 \left( \frac{2 \cdot 10}{40} \right)^2 + 0,0257 \left( \frac{2 \cdot 10}{40} \right)^4 . \quad (36)$$

Na kraju se dobiva faktor koncentracije naprezanja  $K_t$  koji iznosi:

$$K_t = 1,80 . \quad (37)$$

#### 7.1.2.1. Prijelaz s većeg na manji promjer konzole izveden zaobljenjem (četvrtina kružnice)

Prijelaz s većeg na manji promjer konzole zaobljenjem najčešći je način, ali ujedno i najlošiji ne uzevši u obzir kada nema nikakvog zaobljenja ili definiranog prijelaza. U ovom je zadatku odabrano zaobljenje  $R = 2 \text{ mm}$  (Slika 54); promjer većeg dijela konzole  $D = 40 \text{ mm}$ , promjer manjeg dijela konzole  $d = 20 \text{ mm}$  te moment savijanja  $M = 300\,000 \text{ Nmm}$ .

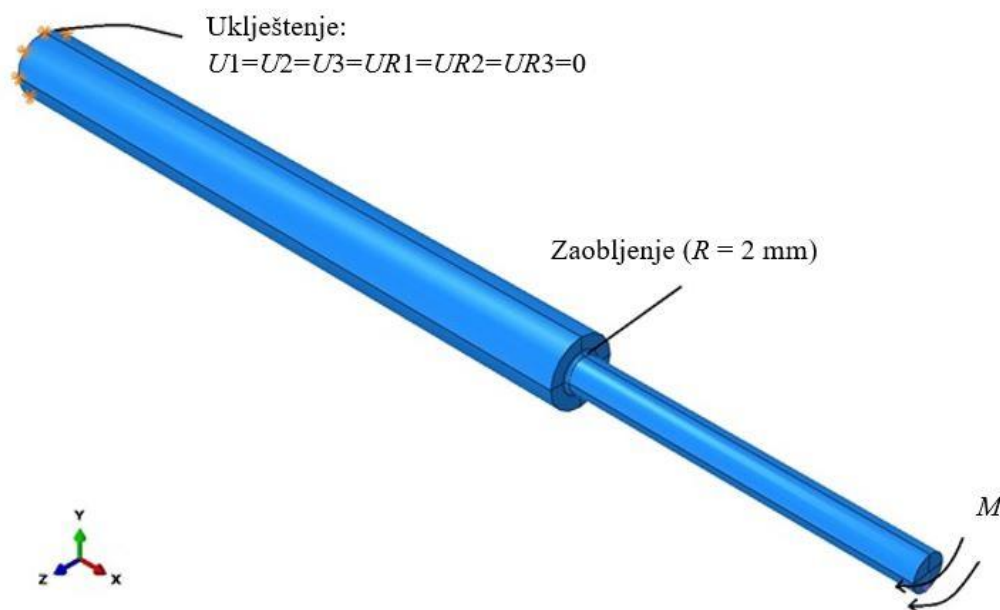


**Slika 54. Prikaz prijelaza zaobljenjem (četvrtina kružnice)**

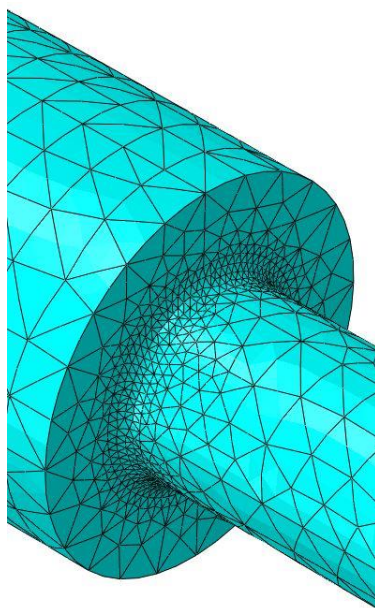
Proračun konzole (Slika 55) opterećene savijanjem započinje modeliranjem same konzole; određivanjem veličine i oblika poprečnog presjeka te njezine duljine. U nastavku se dodjeljuju stupnjevi slobode tj. definira se uklještenje konzole kao i određivanje mjesta, vrste, veličine i smjera opterećenja. U ovom slučaju, za opterećenje, odabran je moment savijanja oko y-osi. Moment oko y-osi stavio se s namjerom da je savijanje oko iste osi kao i u slučaju savijanja konzole konstantnog poprečnog presjeka (Slika 28).

Sljedeći je korak bio na modelu konzole odrediti optimalnu mrežu tetraedarskih konačnih elemenata (C3D10I). Ako se zadovoljavajući rezultati dobivaju već s malim brojem konačnih elemenata, nije potrebno povećavati broj elemenata i na taj način produžiti vrijeme računanja u programskom paketu *Abaqus*. Zadavanjem različitih globalnih veličina elemenata dobili smo mreže s različitim brojem elemenata (Slika 57); mreža od 4934 (Slika 57 A)) elementa, mreža od 14026 (Slika 57 B)) elementa, mreža od 38404 (Slika 57 C)) elementa te mreža od 51936 (Slika 57 D)) elementa. Važno je reći da se na mjestu zaobljenja, gdje je  $R = 2 \text{ mm}$ , mreža progušćuje (dodaju se lokalni elementi) kako bi se dobilo dobro rješenje i kako bi konvergencija rješenja na tom mjestu bila što brža (Slika 56). Progušćivanje mreže obično se radi na mjestima

geometrijskih diskontinuiteta te na mjestima za koja znamo da dolazi do koncentracije naprezanja kao i na mjestima složenih geometrija.



**Slika 55. Model konzole opterećen na savijanje s promjenjivim poprečnim presjekom i zaobljenjem radijusom**



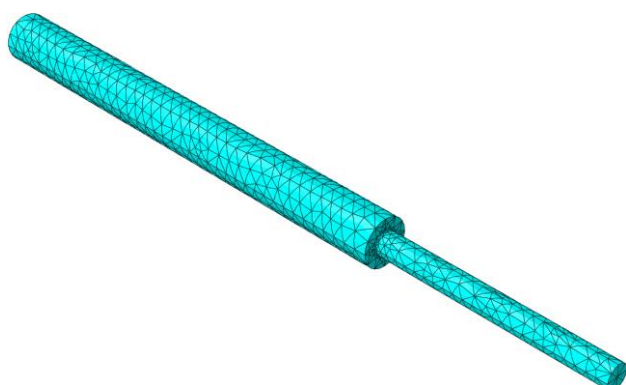
**Slika 56. Progušćivanje mreže na mjestu zaobljenja radijusom**

Tablica 7 prikazuje dobivene rezultate naprezanja i faktora koncentracije naprezanja. Naprezanje savijanja na mjestu prijelaza s većeg na manji promjer predstavlja geometrijski diskontinuitet te će se na tom mjestu javiti maksimalna naprezanja  $\sigma_{\max}$ , dok će se na mjestu dovoljno udaljenom od mjesta koncentracije naprezanja javiti nominalna naprezanja  $\sigma_{\text{nom}}$ . Iz

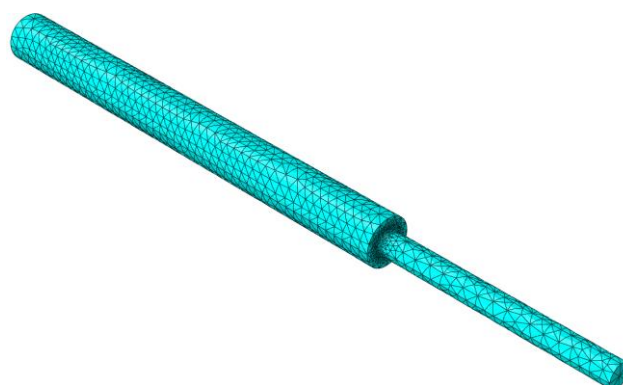
tablice je vidljivo da se mrežom od 38404 elemenata dobivaju dobri rezultati, tj. rezultati koju imaju grešku manju od dozvoljene inženjerske greške koja iznosi 5%. Mreža od 38404 elemenata je označena plavom bojom (Tablica 7) te će se upravo za tu mrežu u daljnjem tekstu prikazati naprezanja i konvergencija rješenja. Mreža od 38404 elemenata dobivena je na način da se cijeloj komponenti dodijele globalni konačni elementi veličine 5 mm, a lokalni elementi na mjestu zaobljenja veličine od samo 1 mm.

**Tablica 7. Rezultati naprezanja za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i zaobljenjem**

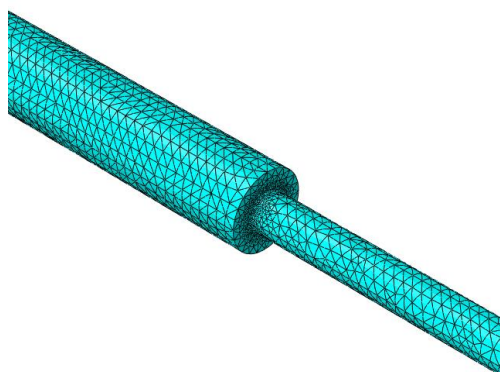
Broj elemenata	$\sigma_{\max}$ (MPa)	$\sigma_{\text{nom}}$ (MPa)	$K_t = \sigma_{\max} / \sigma_{\text{nom}}$	$K_{t\text{ANALITIČKI}}$	$E_{\text{REL}} / \%$
4934	598	380	1,56	1,80	13,3
14206	644	380	1,69	1,80	6,1
38404	657,2	380	1,73	1,80	3,89
51936	660,9	380	1,74	1,80	3,33



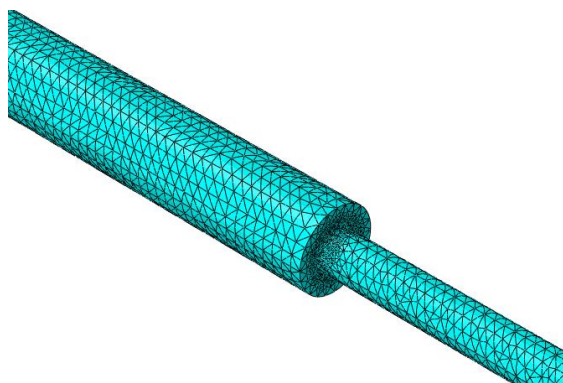
A) 4934 elemenata



B) 14206 elemenata



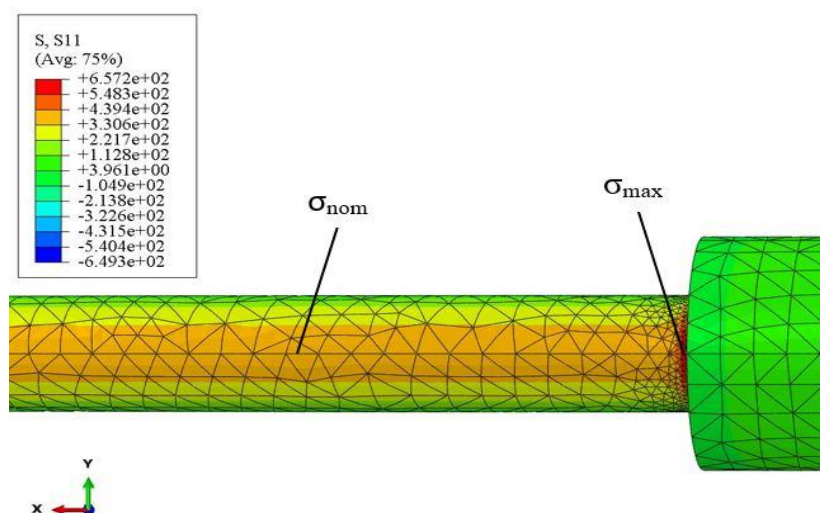
C) 38404 elementa



D) 51936 elemenata

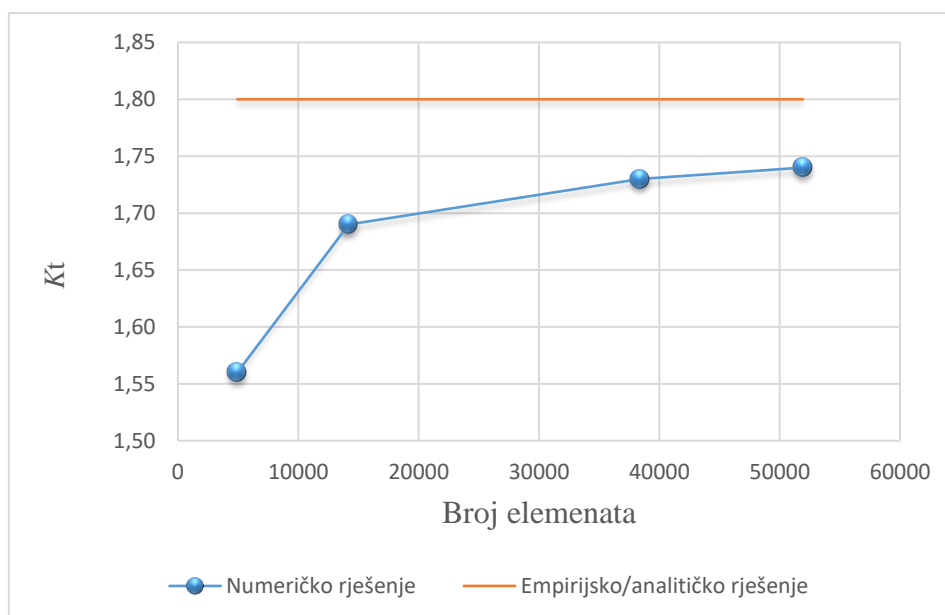
**Slika 57. Različite mreže konzole opterećene savijanjem s promjenjivim poprečnim presjekom i zaobljenjem radiusom**

Maksimalna naprezanja  $\sigma_{\max}$  na mjestu koncentracije naprezanja označena su jarko crvenom bojom i iznose 657,2 MPa. Nominalna naprezanja  $\sigma_{\text{nom}}$ , naprezanja na mjestu dovoljno udaljenom od mjesta koncentracije naprezanja iznose 380 MPa i označena su svijetlo narančastom bojom (Slika 58).



**Slika 58. Raspodjela naprezanja u MPa konzole s promjenjivim poprečnim presjekom i zaobljenjem radijusom**

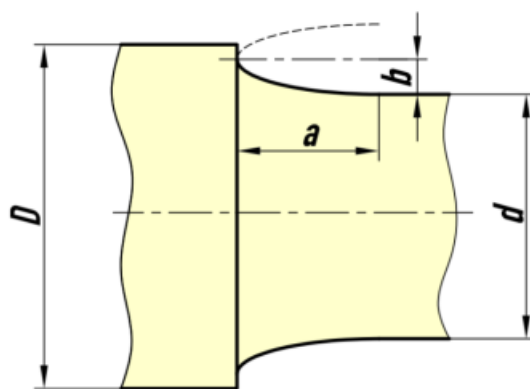
Konvergencija rješenja u ovom primjeru je brza i postiže se već za treću mrežu tj. s mrežom od 38404 elementa. Greška u rezultatu između faktora koncentracije naprezanja dobivenog u programskom paketu *Abaqusu* i analitičko-empirijskim putem iznosi 3,89% što je ispod dopuštene inženjerske greške od 5% (Slika 59).



**Slika 59. Konvergencija faktora koncentracije naprezanja za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i zaobljenjem radijusom**

### 7.1.2.2. Prijelaz s većeg na manji promjer konzole izveden eliptičnim zaobljenjem.

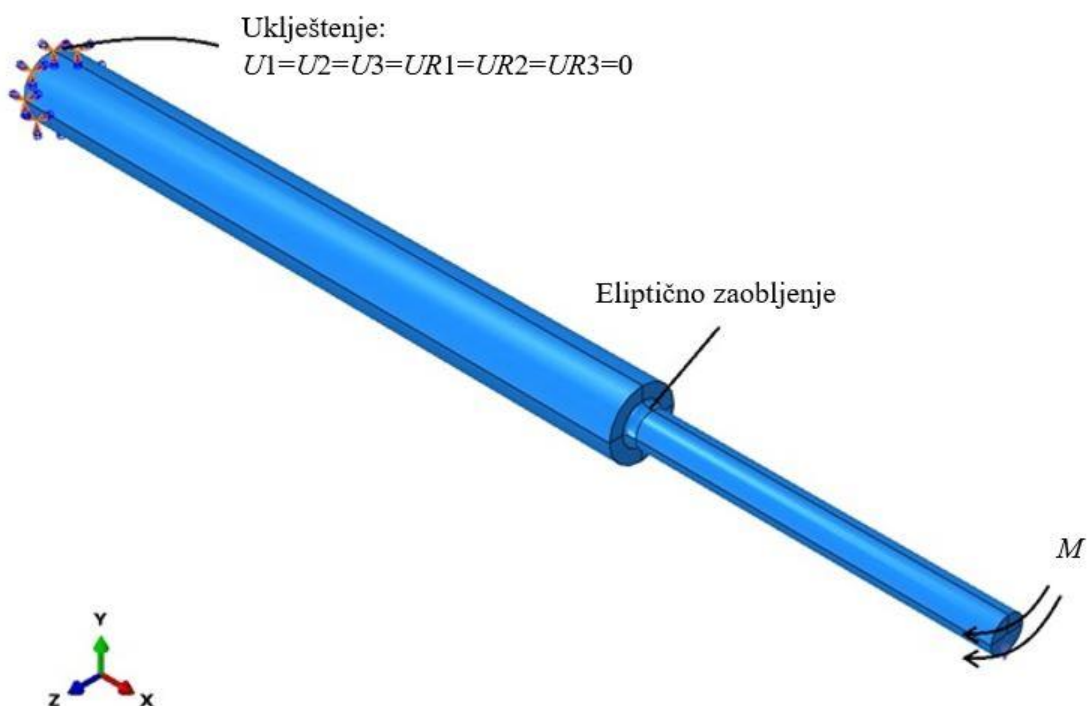
Eliptično zaobljenje prema preporukama struke puno je bolje od običnog kružnog zaobljenja, međutim za eliptično zaobljenje potrebno je dovoljno mjesta na vratilu/osovini za njegovo razvijanje. U preporukama literature [15] stoji da je poželjan omjer između velike poluosi „ $a$ “ i male poluosi „ $b$ “ između dva i četiri tj.  $a/b = 2 \cdots 4$  (Slika 60). Odabirom kružnog zaobljenja od dva milimetra ( $R = 2 \text{ mm}$ ), automatski povlači da i kod eliptičnog zaobljenja mala poluos „ $b$ “ iznosi dva milimetra ( $b = 2 \text{ mm}$ ). Ako mala poluos iznosi dva milimetra, a preporučeni omjer iznosi od dva do četiri, velika poluos u ovom slučaju iznosi šest milimetara ( $a = 6 \text{ mm}$ ) te je omjer  $a/b$  jednak tri.



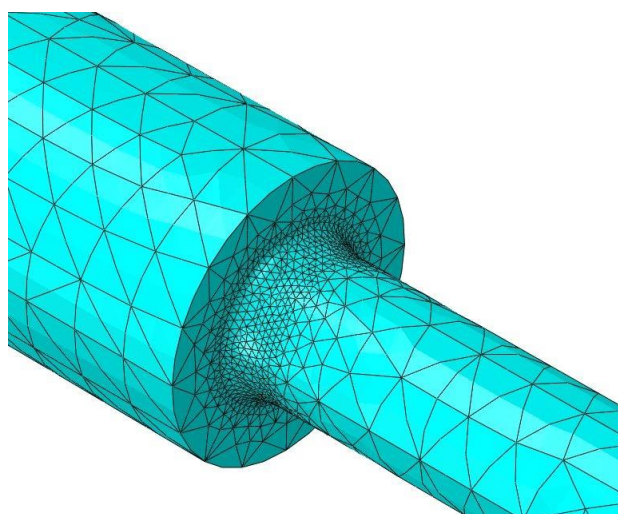
Slika 60. Eliptično zaobljenje [15]

Proračun konzole (Slika 61) opterećene momentom savijanja započinje modeliranjem same konzole. Nakon toga se određuje veličina i oblik poprečnog presjeka te duljina konzole. U nastavku se dodjeljuju stupnjevi slobode tj. definira se uklještenje konzole kao i određivanje mjesta, vrste, veličine i smjera opterećenja. U ovom slučaju za opterećenje odabran je moment savijanja oko  $y$ -osi zbog podudaranja savijanja oko iste osi kao i kod slučaja s konzolom konstantnog poprečnog presjeka (Slika 28).

Sljedeći je korak bio na modelu konzole odrediti optimalnu mrežu konačnih elemenata C3D10I kao i kod primjera prijelaza s kružnim zaobljenjem. Zadavanjem različitih globalnih veličina elemenata dobili smo mreže s različitim brojem elemenata (Slika 63); mreža od 5074 (Slika 63 A)) elementa, mreža od 16321 (Slika 63 B)) elementa, mreža od 41864 (Slika 63 C)) elementa te mreža od 62492 (Slika 63 D)) elementa. Na mjestu eliptičnog zaobljenja mreža se proglašuje (dodaju se lokalni elementi) da bi konvergencija rješenja bila brža i da se bolje i točnije opiše geometrija elipse (Slika 62).



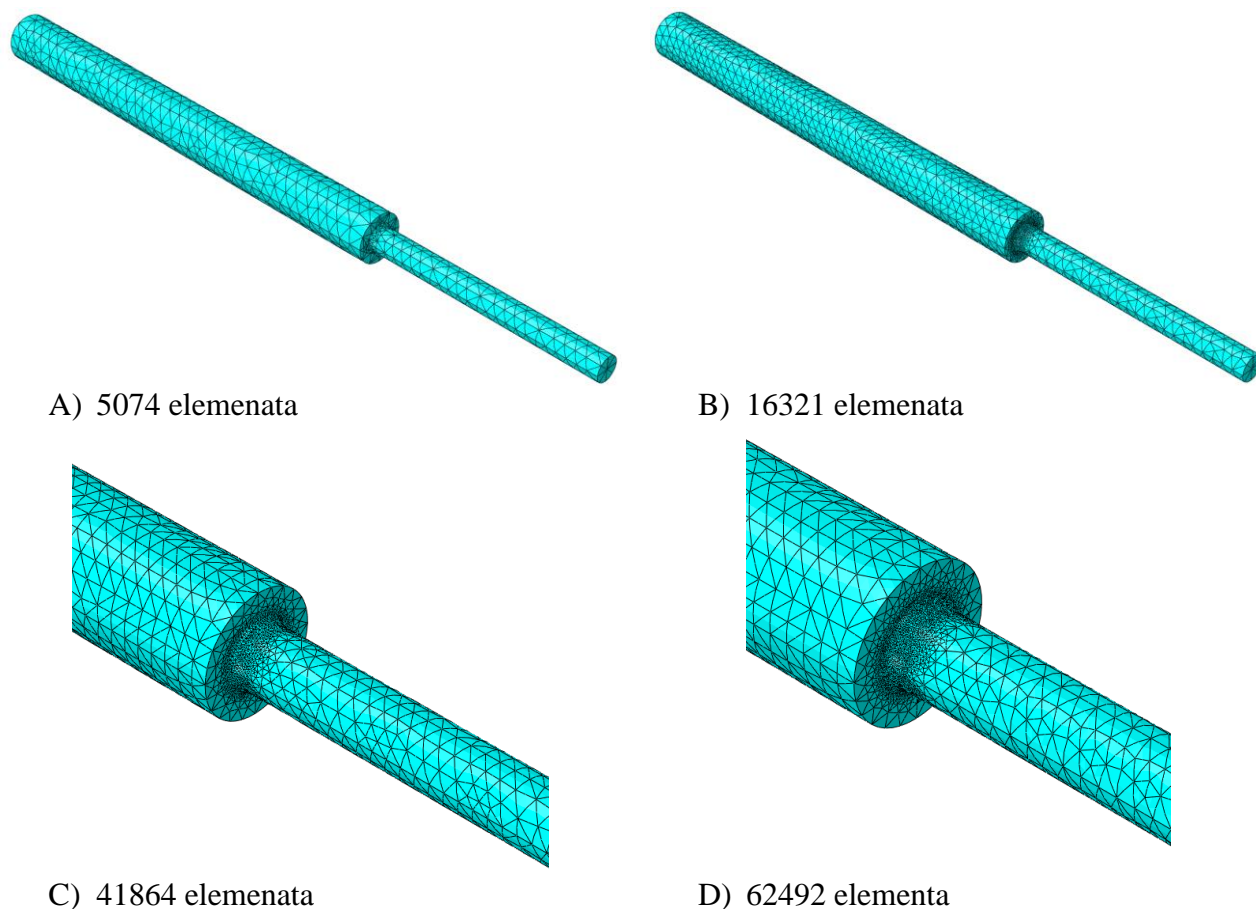
**Slika 61. Model konzole opterećen na savijanje s promjenjivim poprečnim presjekom i eliptičnim zaobljenjem**



**Slika 62. Progušćivanje mreže na mjestu eliptičnog zaobljenja**

U tablici 8 prikazani su dobiveni rezultati. Naprezanje savijanja na mjestu prijelaza s većeg na manji promjer predstavlja geometrijski diskontinuitet te će se na tom mjestu javiti maksimalna naprezanja označena  $\sigma_{\max}$ , dok će se na mjestu dovoljno udaljenom od mjesta koncentracije naprezanja javiti nominalna naprezanja  $\sigma_{\text{nom}}$ . Iz tablice je vidljivo da se mrežom od 16321 elemenata dobivaju zadovoljavajući rezultati koji su označeni plavom bojom (Tablica 8) te će se upravo za tu mrežu u daljnjem tekstu prikazati raspored naprezanja po presjeku konzole kao i konvergencija rješenja.





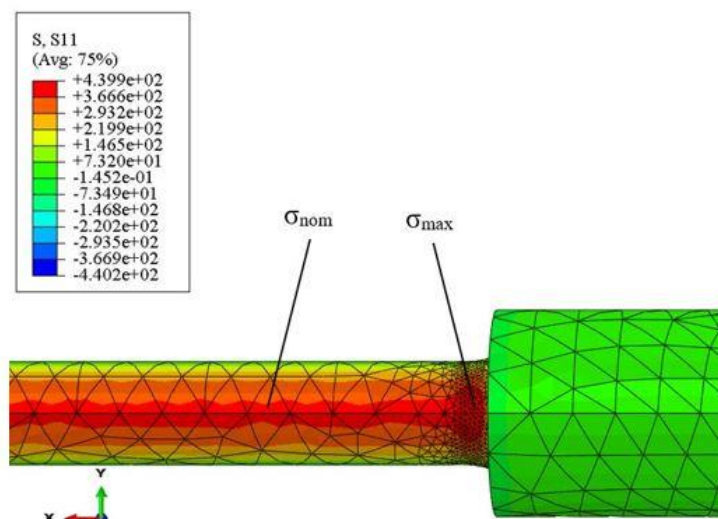
**Slika 63. Različite mreže za konzolu opterećenu na savijanje promjenjivog poprečnog presjeka s eliptičnim zaobljenjem**

**Tablica 8. Rezultati naprezanja savijanja za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i eliptičnim zaobljenjem**

Broj elemenata	$\sigma_{\max}$ (MPa)	$\sigma_{\text{nom}}$ (MPa)	$K_t = \sigma_{\max} / \sigma_{\text{nom}}$
5074	430,3	380,1	1,13
16321	439,9	380,1	1,16
41864	439,9	380,1	1,16
62492	439,9	380,1	1,16

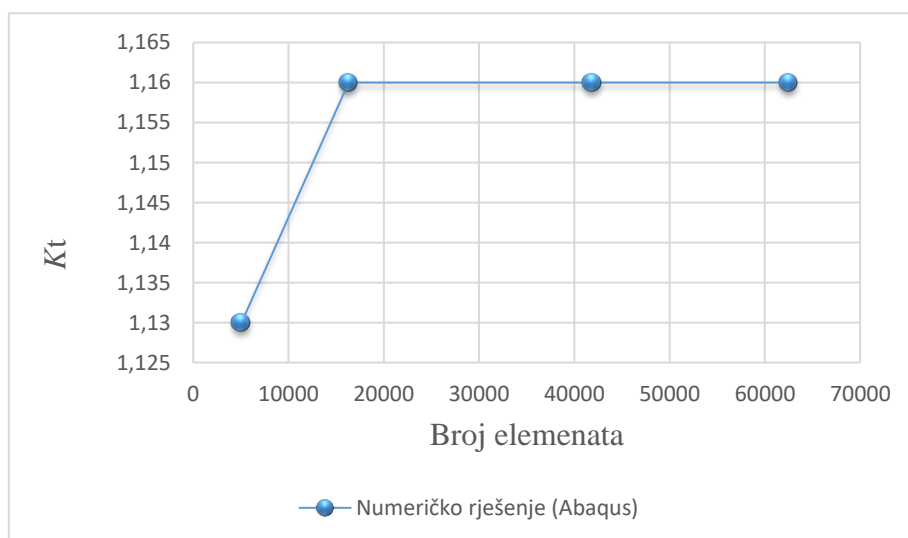
Maksimalna naprezanja  $\sigma_{\max}$  na mjestu koncentracije naprezanja označena su jarko crvenom bojom i iznose 439,9 MPa. Nominalna naprezanja  $\sigma_{\text{nom}}$ , naprezanja na mjestu dovoljno udaljenom od mjesta koncentracije naprezanja iznose 380,1 MPa i označena su svijetlo narančastom bojom (Slika 64).





**Slika 64. Raspodjela naprezanja konzole u MPa s promjenjivim poprečnim presjekom i eliptičnim zaobljenjem**

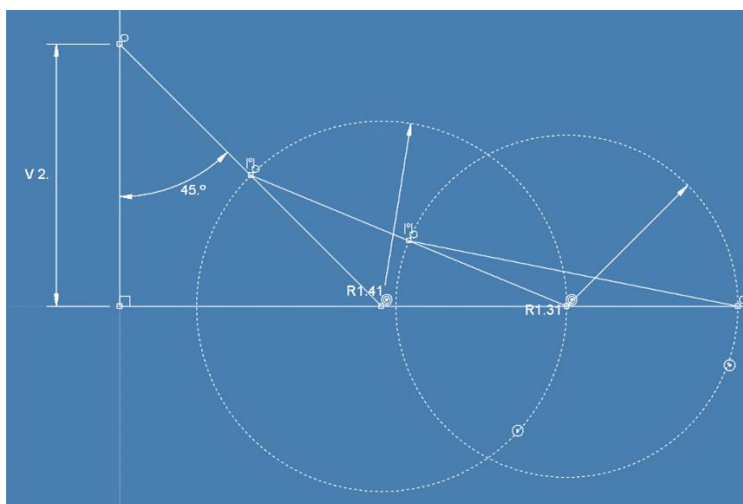
U ovom slučaju kada je prijelaz s većeg na manji promjer konzole izveden pomoću eliptičnog zaobljenja, dobivena se rješenja pomoću programskog paketa *Abaqus* ne mogu usporediti s analitičkim rješenjima jer analitički izrazi za ovakav slučaj ne postoje. U ovom slučaju može se provjeriti stabilnost i konvergencija modela na način testiranja više različitih mreža konačnih elemenata. Iz dijagrama vidimo da je model u programskom paketu *Abaqus* stabilan; ako se postiže konvergencija automatski je postignuta i stabilnost koja se odnosi na numerički postupak kod određivanja rješenja [16] (Slika 65).



**Slika 65. Konvergencija faktora koncentracije napreznja za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i eliptičnim zaobljenjem**

### 7.1.2.3. Prijelaz s većeg na manji promjer konzole definiranim pomoću metode vlačnih trokuta

Proces nastajanja metode vlačnih trokuta preuzet je iz literature [9]. Kateta prvog trokuta duga je dva milimetra zbog potrebe da kod svih primjera prijelaza s većeg na manji promjer imamo otprilike prijelaz iste „veličine“ i na taj način omogućimo pošteno uspoređivanje (promjer kružnog zaobljenja je  $R = 2$  mm, mala poluos kod eliptičnog zaobljenja  $b = 2$  mm). Vrlo je važno da kod metode vlačnih trokuta kut prvog trokuta koji se stavlja na prijelaz bude  $45^\circ$  što je objašnjeno u poglavlju 4 (Slika 13). Za sljedeći trokut koji se stavlja prvo je potrebno nacrtati kružnicu čije je središte u vrhu prvog trokuta, a promjer kružnice iznosi polovicu duljine hipotenuze prvog trokuta. Zatim se od polovice hipotenuze prvog trokuta vuče linija do sjecišta kružnice i površine konzole manjeg presjeka. Na kraju se crta kružnica čije je središte u vrhu drugog trokuta, a promjer iznosi polovicu duljine hipotenuze drugog trokuta. Od polovice hipotenuze drugog trokuta vuče se linija do sjecišta kružnice i površine konzole manjeg presjeka te na taj način dobivamo i treći trokut (Slika 66).

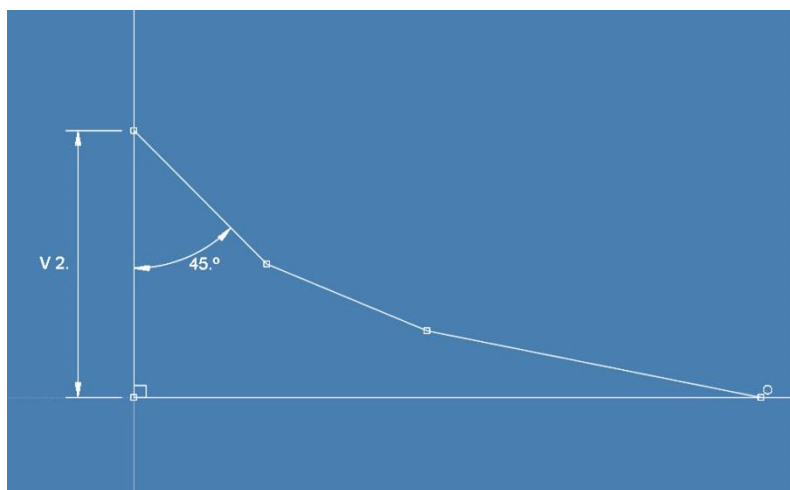


**Slika 66. Proces crtanja metode vlačnih trokuta**

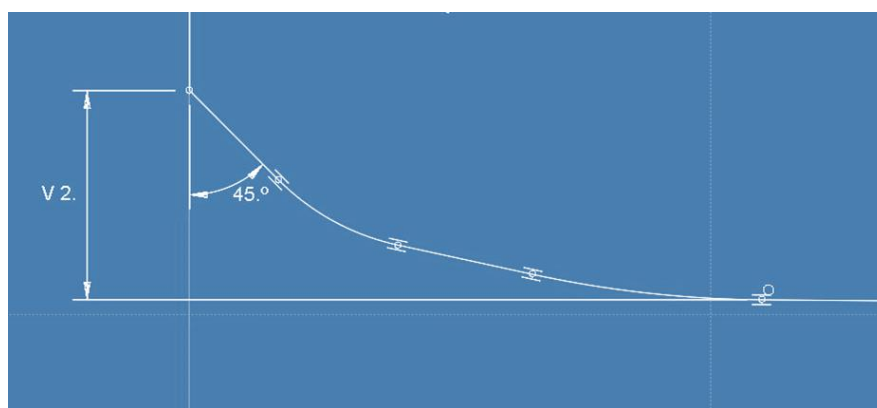
Nakon crtanja vlačnih trokuta potrebno je obrisati sve linije i kružnice koje nisu potrebne i na taj se način dobiva zaobljenje definirano pomoću metode vlačnih trokuta prije zaobljavanja (Slika 67).

Da bi metoda vlačnih trokuta bila potpuna potrebno je provesti zaobljavanje na trokutima u svrhu smanjivanja bilo kakve koncentracije naprezanja zbog geometrijskih diskontinuiteta. Taj korak u potpunosti ovisi o želji i sposobnostima čovjeka koji modelira u nekom od programskih paketa. Zaobljavanje je moguće izvesti vrlo precizno do te mjere da nema nikakvih naglih pregiba već dobivena linija izgleda kao da je povučeni „spline“ s mnogo čvorova ili je

moгуće samo na mjestima spajanja linija staviti određena zaobljenja. Bitno je da i nakon zaobljavanja linija trokuta, kut od  $45^\circ$  ostane zaista  $45^\circ$  i da je duljina katete prvog trokuta dva milimetra zbog potreba zadatka i mogućnosti „pravednog“ uspoređivanja rezultata za različite prijelaze s većeg na manji promjer konzole opterećene na savijanje.



**Slika 67. Metoda vlačnih trokuta prije zaobljavanja prijelaza s trokuta na trokut**

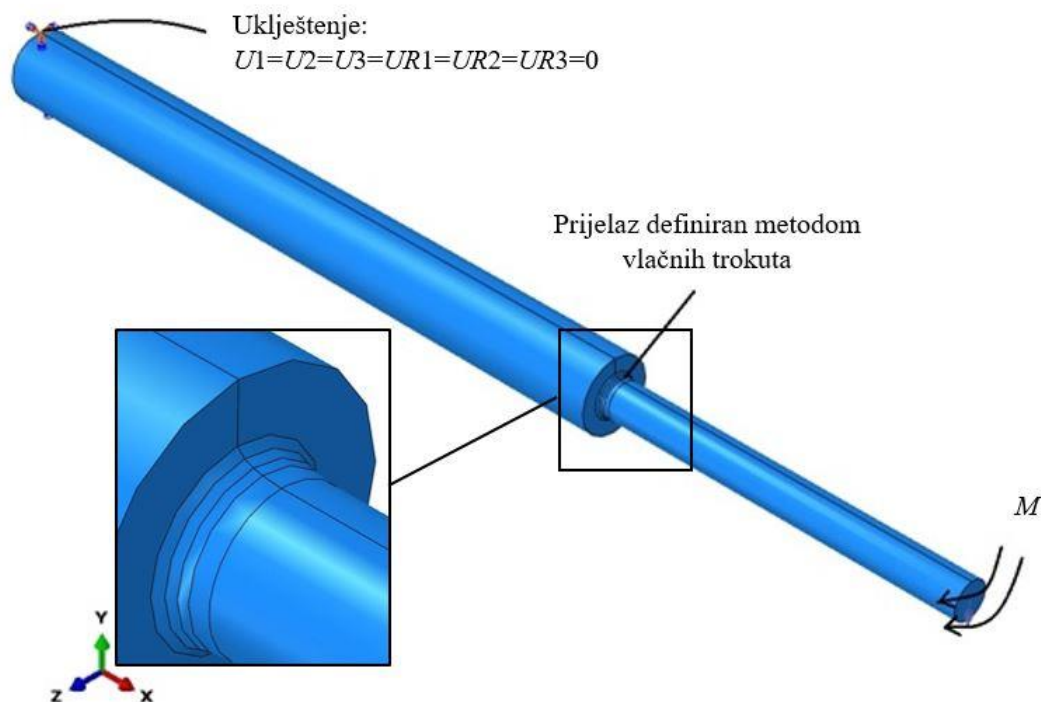


**Slika 68. Konačan prijelaz s većeg na manji promjer konzole nakon zaobljavanja prijelaza s trokuta na trokut**

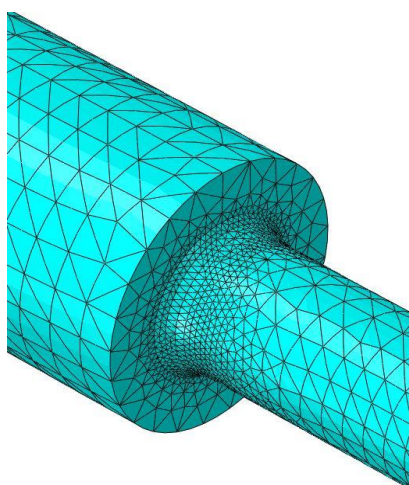
Proračun konzole (Slika 69) opterećene savojno započinje modeliranjem same konzole; određivanjem veličine, oblika, poprečnog presjeka te naravno duljine same konzole. Također je nužno dodijeliti stupnjeve slobode tj. definira se uklještenje konzole te mjesto, vrsta, veličina i smjer opterećenja. Za opterećenje je odabran moment savijanja oko y-osi. s namjerom da savijanje bude oko iste osi kao i u slučaju savijanja konzole konstantnog poprečnog presjeka (Slika 28).

Dalje je trebalo odrediti optimalnu mrežu konačnih tetraedarskih elemenata (C3D10I). Zadavanjem različitih globalnih veličina elemenata dobili smo mreže s različitim brojem elemenata (Slika 71); mreža od 6719 (Slika 71 A)) elemenata, mreža od 28993 (Slika 71 B))

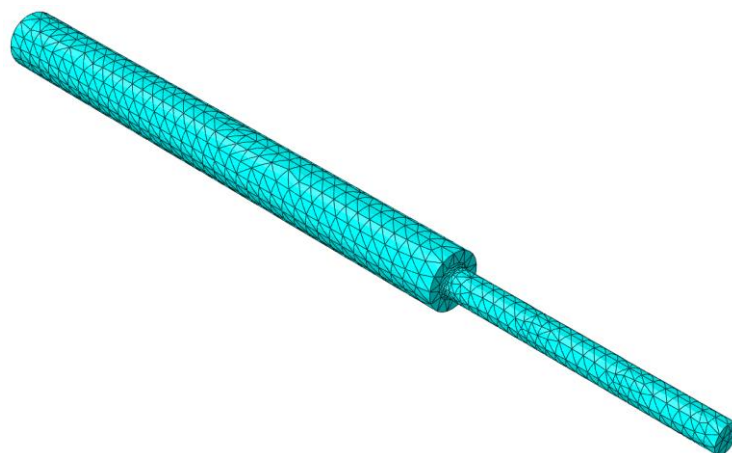
elemenata, mreža od 54137 (Slika 71 C)) elemenata te na kraju najgušća mreža od 95168 elemenata (Slika 71 D)). Na mjestu prijelaza koji je definiran pomoću metode vlačnih trokuta mreža se proglašuje kako bi se dobilo dobro rješenje i kako bi konvergencija rješenja na tom mjestu bila što brža (Slika 70). Proglašivanje mreže potrebno je na mjestima geometrijskih diskontinuiteta te na mjestima za koja znamo da dolazi do koncentracije naprezanja kao i na mjestima složenih geometrija.



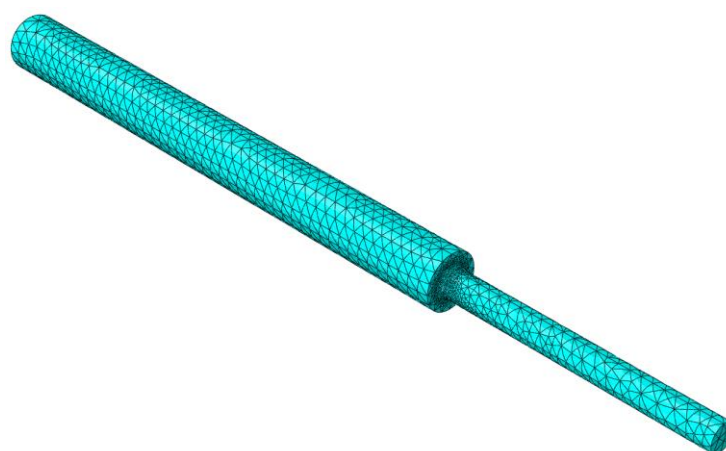
**Slika 69. Model konzole opterećene na savijanje s promjenjivim poprečnim presjekom i prijelazom definiranim pomoću metode vlačnih trokuta**



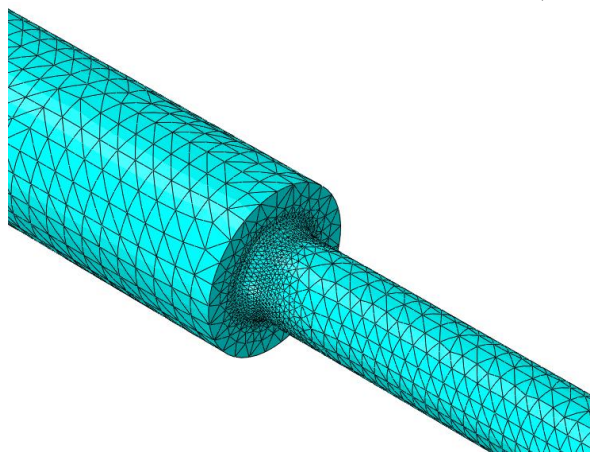
**Slika 70. Proglašivanje mreže na mjestu prijelaza definiranog pomoću metode vlačnih trokuta**



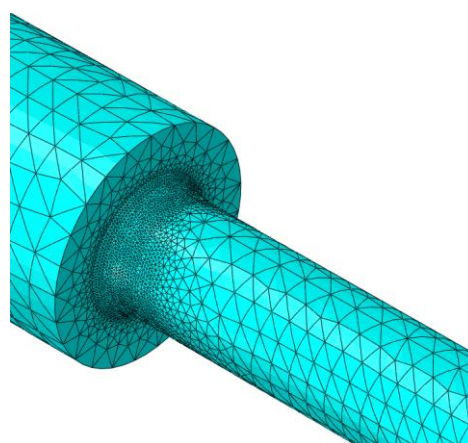
A) 6719 elemenata



B) 28993 elementa



C) 54137 elemenata



D) 95168 elemenata

**Slika 71. Različite mreže za konzolu opterećenu na savijanje s promjenjivim poprečnim presjekom i prijelazom definiranim pomoću metode vlačnih trokuta**

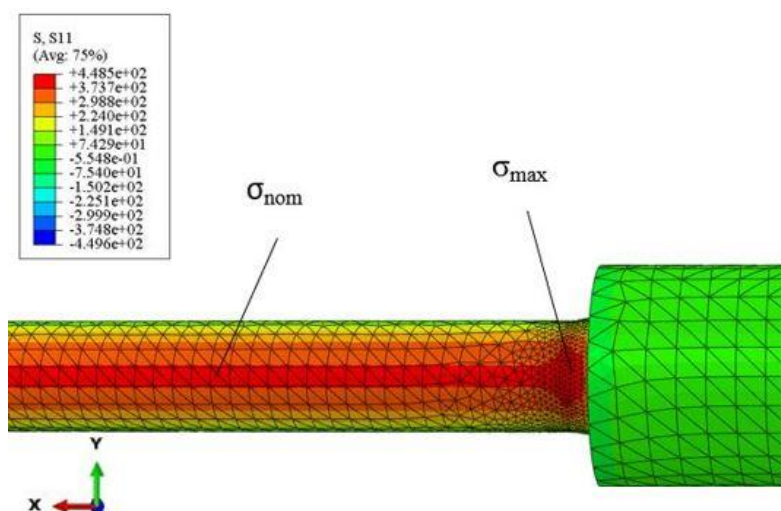
U tablici 9 prikazani su dobiveni rezultati. Naprezanje savijanja na mjestu prijelaza s većeg na manji promjer predstavlja geometrijski diskontinuitet te će se na tom mjestu javiti maksimalna naprezanja  $\sigma_{\max}$ , dok će se na mjestu dovoljno udaljenom od mjesta koncentracije naprezanja javiti nominalna naprezanja  $\sigma_{\text{nom}}$ . Iz tablice je vidljivo da se mrežom od 54137

elemenata dobivaju zadovoljavajući rezultati. Numerička analiza s mrežom od 95168 elemenata traje gotovo tri puta duže od mreže s 54137 elemenata dok ostale mreže daju manje točne rezultate. Mreža od 54137 elemenata je označena plavom bojom (Tablica 9) te će se upravo za tu mrežu u daljnjem tekstu prikazati naprezanja i konvergencija rješenja.

**Tablica 9. Naprezanja za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i prijelazom definiranim pomoću metode vlačnih trokuta**

Broj elemenata	$\sigma_{\max}$ (MPa)	$\sigma_{\text{nom}}$ (MPa)	$K_t = \sigma_{\max} / \sigma_{\text{nom}}$
6719	430	380,1	1,131
28993	446,9	380,1	1,176
54137	448,5	380,1	1,179
95168	448,7	380,1	1,180

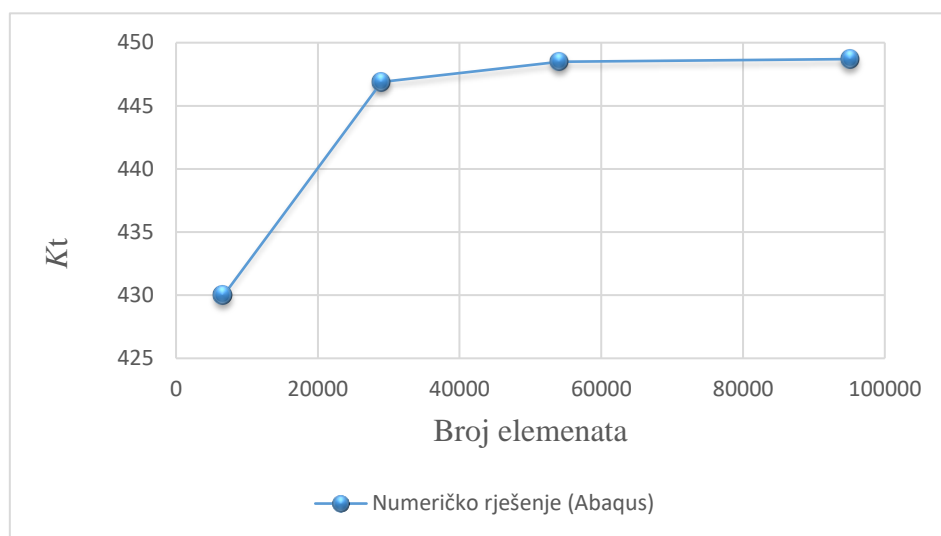
Maksimalna naprezanja  $\sigma_{\max}$  na mjestu koncentracije naprezanja označena su jarko crvenom bojom i iznose 448,5 MPa. Nominalna naprezanja  $\sigma_{\text{nom}}$ , naprezanja na mjestu dovoljno udaljenom od mjesta koncentracije naprezanja iznose 380,1 MPa i označena su crvenom bojom (Slika 72).



**Slika 72. Raspodjela naprezanje u MPa za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i prijelazom definiranim pomoću metode vlačnih trokuta**

U ovom slučaju kada je prijelaz s većeg na manji promjer konzole izveden pomoću metode vlačnih trokuta, dobivena se rješenja pomoću programskog paketa *Abaqus* ne mogu usporediti s analitičkim rješenjima jer analitički izrazi za ovakav slučaj ne postoje. U ovom slučaju može se provjeriti stabilnost modela na način testiranja više različitih mreža konačnih

elemenata. Iz dijagrama vidimo da je model u programskom paketu *Abaqus* stabilan i da se konvergencija rješenja postiže kao i kod primjera s eliptičnim zaobljenjem (Slika 73).



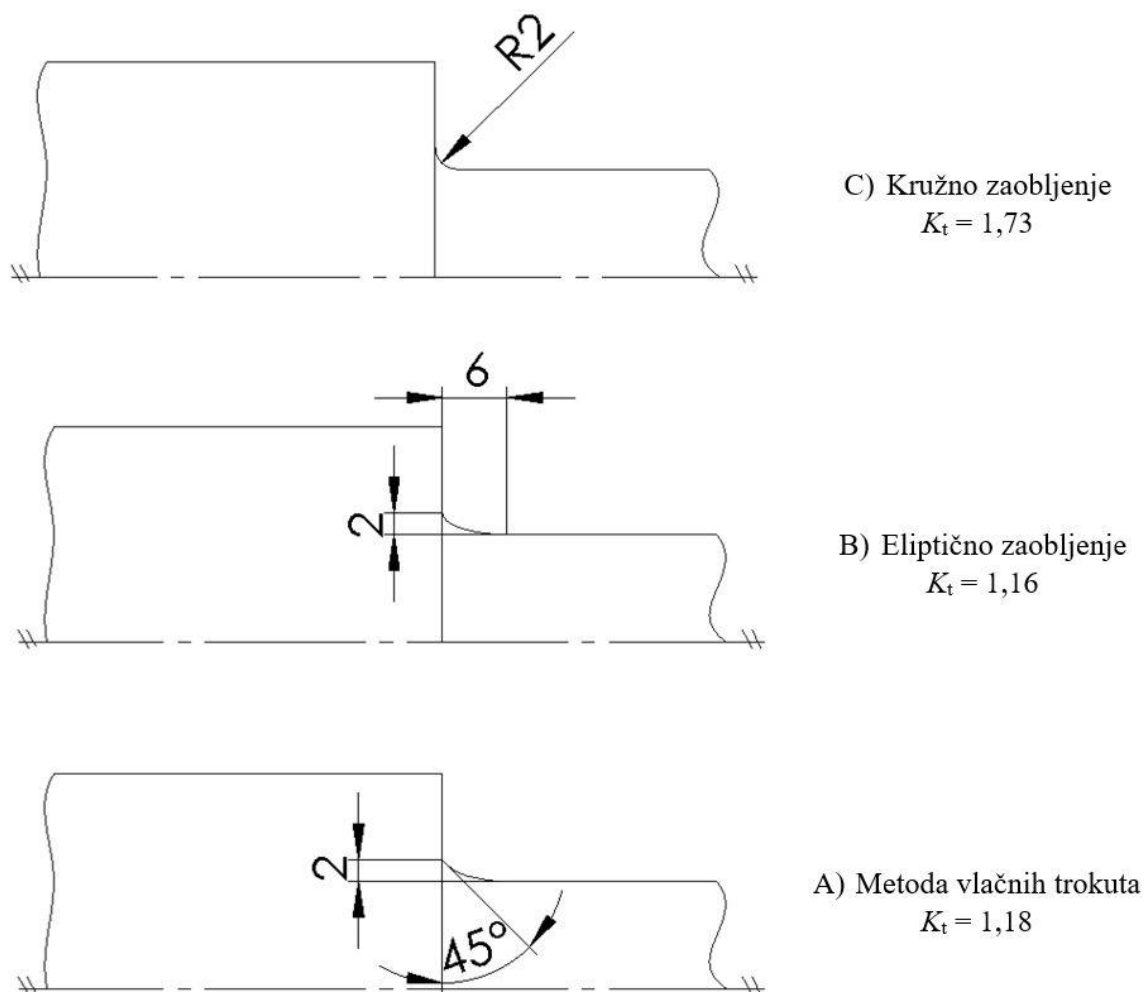
**Slika 73. Konvergencija faktora koncentracije naprezanja za konzolu s promjenjivim poprečnim presjekom i prijelazom definiranim pomoću metode vlačnih trokuta**



## 8. USPOREDBA FAKTORA KONCENTRACIJE NAPREZANJA

Nakon dobivenih rezultata za različite prijelaze s većeg na manji promjer kozole opterećene na savijanje (Slika 74), potrebno je usporediti i komentirati dobivene rezultate, a tu se prvenstveno misli na usporedbu faktora koncentracije naprezanja.

Prvo ćemo za usporedbu uzeti prijelaz definiran običnim kružnim zaobljenjem i eliptičnim zaobljenjem (Slika 74 A) i B)). Razlika u faktorima koncentracije naprezanja između ovakva dva prijelaza je velika i iznosi 33% (Tablica 10). U praksi se najčešće koristi obično kružno zaobljenje zbog jednostavnosti izrade, međutim vidimo da eliptičnim zaobljenjem dobivamo za jednu trećinu bolje rezultate što nam kaže da je u slučaju korištenja eliptičnog zaobljenja umjesto kružnog zaobljenja, moguće smanjenje presjeka (mase) konstrukcije ili korištenja manje kvalitetnog materijala što na kraju rezultira manjim troškovima i većom zaradom što je i krajnji cilj svakog inženjera.



Slika 74. Prikaz prijelaza s većeg na manji promjer konzole opterećene na savijanje



Drugi primjer koji ćemo usporediti je prijelaz napravljen običnim kružnim zaobljenjem i prijelaz definiran pomoću metode vlačnih trokuta. Razlika je gotovo ista kao u prethodnom primjeru i iznosi gotovo 32% (Tablica 10) te vrijede ista pravila kao i kod prve usporedbe.

Zadnji, treći primjer, uspoređuje prijelaz napravljen pomoću metode vlačnih trokuta s eliptičnim prijelazom. Razlika u faktorima koncentracije naprezanja iznosi 1,97% što je vrlo malo. Iako je razlika među faktorima mala, ipak mala prednost ide na stranu prijelaza oblikovanog pomoću eliptičnog zaobljenja. Ovdje treba spomenuti da literatura u kojoj je opisana metoda vlačnih trokuta [9] nikada nije uspoređivala rezultate između eliptičnog zaobljenja i zaobljenja definiranog pomoću metode vlačnih trokuta već samo kružno zaobljenje s zaobljenjem definiranim pomoću vlačnih trokuta

**Tablica 10. Usporedba dobivenih faktora koncentracije naprezanja za različite prijelaze s većeg na manji promjer konzole opterećene na savijanje**

		Kružno zaobljenje	Eliptično zaobljenje	$E_{REL} / \%$
1)	$K_t$	1,73	1,16	32,95≈33
		Kružno zaobljenje	MVT	$E_{REL} / \%$
2)	$K_t$	1,73	1,18	31,8
		MVT	Eliptično zaobljenje	$E_{REL} / \%$
3)	$K_t$	1,18	1,16	1,965≈1,97

## 9. ZAKLJUČAK

U radu je provedena numerička analiza konstrukcija, točnije analiza konzole promjenjivog poprečnog presjeka za različite prijelaze s većeg na manji promjer konzole kružnog poprečnog presjeka.

Radu se pristupilo na sljedeći način. Na početku se analitičkim putem izračunalo naprezanje i pomak za konzolu konstantnog kružnog poprečnog presjeka. Na taj način provjerilo se poznavanje programskog paketa *Abaqus* kao i odabir potrebnih konačnih elemenata.

Da bi odabrali konačne elemente potrebno je promatrati točnost rješenja dobivenog pomoću numeričke analize i analitičkih izraza, te je potrebno povjeriti stabilnost modela kao i konvergenciju rješenja. Na primjeru konzole s konstantnim poprečnim presjekom, numeričkom analizom postignuta je zadovoljavajuća točnost te se analitičko i numeričko rješenje (naprezanje) pomoću tetraedarskih elemenata razlikuje 0,91% što je unutar dozvoljenje inženjerske greške od 5%. Pomaci su i kod analitičkog i numeričkog rješenja podjednaki. Na tom se primjeru pokazala i konvergencija rješenja čime se dao odgovor i za stabilnost budući da je za konvergentno rješenje numerički postupak redovno stabilan.

Nakon dobivanja dobrih rezultata na jednostavnom primjeru konzole konstantnog poprečnog presjeka, prešlo se na modeliranje numeričkog modela konzole s promjenjivim kružnim poprečnim presjekom. Prvo se napravio model konzole kod kojeg je prijelaz s većeg na manji promjer oblikovan običnim kružnim zaobljenjem ( $1/4$  kružnice). Razlog tome je postojanje analitičko-empirijskih izraza za računanje faktora koncentracije naprezanja za slučaj kada je prijelaz s većeg na manji promjer oblikovan kružnim zaobljenjem. Dobiveni rezultati, faktor koncentracije naprezanja dobiven pomoću empirijskih izraza i faktor koncentracije naprezanja dobiven numeričkom analizom (za odabranu mrežu konačnih elemenata), u ovom se primjeru razlikuju za 3,89% što je također ispod dozvoljenje inženjerske greške od 5%. Na primjeru se pokazala konvergencija rješenja čime se dao odgovor za stabilnost.

Sljedeći primjer na kojem se računao faktor koncentracije naprezanja bio je za konzolu kada je prijelaz s većeg na manji promjer oblikovan eliptičnim zaobljenjem. Kod ovog primjera ne postoje analitičko-empirijski izrazi za računanje faktora koncentracije naprezanja tako da se koristila samo numerička analiza. Upravo je zbog nepostojanja analitičko-empirijskih izraza vrlo bitna provjera konvergencije dobivenih rješenja kao i stabilnost. Na primjeru se pokazala

konvergenција rješenja, a čime se dao odgovor i za stabilnost budući da je za konvergentno rješenje numerički postupak redovno stabilan.

Zadnji primjer za koji se računao faktor koncentracije naprezanja bio je za konzolu kod koje je prijelaz s većeg na manji promjer oblikovan pomoću metode vlačnih trokuta. Za ovaj slučaj, kao i za slučaj eliptičnog zaobljenja, također ne postoje analitičko-empirijski izrazi te je bilo važno pokazati konvergenciju rješenja kao i stabilnost, što je i učinjeno.

Na samom kraju, usporedila su se rješenja; faktori koncentracije naprezanja za slučaj kružnog zaobljenja, eliptičnog zaobljenja te zaobljenja oblikovanog pomoću metode vlačnih trokuta. Kod usporedbe rješenja vidljivo je da prijelaz pomoću eliptičnog zaobljenja daje najbolje rezultate (najmanji faktor koncentracije naprezanja), a kružno zaobljenje daje najlošije rezultate (najveći faktor koncentracije naprezanja).

Prije početka ovog diplomskog rada bilo je poznato da je kružno zaobljenje lošije od zaobljenja definiranog pomoću metode vlačnih trokuta zbog literature [9] koja je uspoređivala upravo kružno i zaobljenje definirano pomoću metode vlačnih trokuta. Ono što je bilo upitno, kakvi se rezultati dobivaju za eliptično zaobljenje u usporedbi s metodom vlačnih trokuta. Na kraju dobivenih numeričkih analiza vidi se da je eliptično zaobljenje bolje od zaobljenja definiranog pomoću metode vlačnih trokuta no bitno je spomenuti da je ta razlika gotovo neznatna te iznosi tek 1,97%.

## LITERATURA

- [1] Marjanović D.: Predavanja iz „Razvoj proizvoda“, FSB Zagreb, 2012.
- [2] Otto K. N.: Wood K. L.: Product Design – Techniques in Reverse Engineering and New Product Development, Prentice Hall New Jersey, 2001.
- [3] Štorga M.: Predavanja iz „Teorija konstruiranja“, FSB Zagreb, 2007.
- [4] <https://hr.wikipedia.org/wiki/Patent>
- [5] <https://www.google.hr/patents/US511916?dq=nikola+tesla&hl=hr&sa=X&sqi=2&pj=1&ved=0ahUKEwj0ubCzqpQAhUEI8AKHW-JDKIQ6AEIMzAD>
- [6] Akhlesh L.: Raul J. M. P.: Engineered Biomimicry, Elsevier Inc, Amsterdam, 2013.
- [7] Rohde D.: Optimiranje i sinteza konstrukcija, FSB Zagreb, 2008.
- [8] <http://www.bloomberg.com/news/photo-essays/2015-02-23/14-smart-inventions-inspired-by-nature-biomimicry>
- [9] Mattheck C.: Secret Design Rules of Nature, Forschungszentrum Karlsruhe GMBH, Karlsruhe 2007.
- [10] Alfirević I.: Nauka o čvrstoći I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [11] [http://web.mit.edu/calculix\\_v2.7/CalculiX/ccx\\_2.7/doc/ccx/node32.html](http://web.mit.edu/calculix_v2.7/CalculiX/ccx_2.7/doc/ccx/node32.html)
- [12] Sorić J.: Metoda konačnih elemenata, Golden Marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [13] Abaqus 6.14 – 1, Dassault Systems, 2016.
- [14] Pilkey D. W.: Formulas for stress, strain and structural matrices, Wiley, New Jersey, 2005.
- [15] Vučković K.: Predavanja iz „Elementi konstrukcija II, FSB Zagreb, 2012.
- [16] Čakmak D.: Numerička analiza krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača, Diplomski rad, FSB Zagreb, 2015.

## **PRILOZI**

### **I. CD-R disc**